Дж. Адамс

БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

Москва
«Мир»

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

INFINITE LOOP SPACES

by

J. F. ADAMS

Hermann Weyl Lectures

The Institute for Advanced Study

Princeton University Press

and

University of Tokyo Press

Princeton, New Jersey

1978

Дж. Адамс

БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

Перевод с англ.
Ю. Б. Рудяка и
А. В. Шокурова
под редакцией
Д. Б. Фукса

Москва "Мир" 1982

1-2

ББК 22.1522
А 28
УДК 513.83

Адамс Дж.
Бесконечнократные пространства петель: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 200 с.

Краткое введение в теорию бесконечнократных пространств петель – новое направление современной топологии. Автор книги – известный английский математик.

Для математиков разных специальностей, аспирантов и студентов.

$\text{А}\ \dfrac{1702040000 - 196}{041(01) - 82}\ 1 - 83$, ч. 1.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Пространство петель ΩX топологического пространства X с отмеченной точкой - это пространство непрерывных отображений отрезка $[0, 1]$ в X, переводящих оба конца в отмеченную точку. Общеизвестно, что пространства петель составляют в некотором смысле привилегированный класс пространств, главным образом из-за наличия в них умножения с рядом хороших свойств. Еще лучше, если пространство является двукратным пространством петель (т.е. пространством петель пространства петель): тогда, например, умножение будет гомотопически коммутативным. Можно ожидать, что многократные, а тем более бесконечнократные пространства петель, сколь бы редко они ни встречались, с гомотопической точки зрения являются едва ли не самыми лучшими из всех пространств. Такие пространства действительно бывают: например, пространство Эйленберга - Маклейна $K(G,n)$ с абелевой группой G и любым n является (с точностью до гомотопической эквивалентности) бесконечнократным пространством петель: $K(G,n) = \Omega^N K(G, n+N)$. Другой пример: классифицирующее пространство BU бесконечной унитарной группы U в силу теоремы Ботта о периодичности гомотопически эквивалентно связной компоненте своего двукратного пространства петель $\Omega^2 BU$, так что $BU \times \mathbb{Z} = \Omega^{2N}(BU\times\mathbb{Z})$ при любом N. Главное достоинство бесконечнократных пространств петель состоит в их родстве с так называемыми спектрами, а через них - с обобщенными теориями когомологий - центральным понятием современной алгебраической топологии. Например, $K(G,n)$ ассоциируется с классическими когомологиями с коэффициентами в G, а BU - с комплексной K-теорией.

Книга Адамса посвящена прежде всего "проблеме распознавания". Как узнать, будет ли данное пространство гомотопически эквивалентно бесконечнократному пространству петель? Для этого, оказывается, нужно, чтобы пространство обладало некоторыми гомотопически инвариантными структурами. Эти структуры представляют и несомненный самостоятельный интерес. В частности, они дают возможность эффективной процедуры "распетливания": $X = \Omega Y_1 = \Omega Y_2 = \dots$. Для пространств эта процедура описана в гл. 2, для отображений (в некоторых частных случаях, так как в общем случае эта задача не решена) – в гл. 6. Главу 3, посвященную локализации и пополнению, можно считать отступлением, а главы 4 и 5 посвящены "трансферу" – одному из наиболее ярких проявлений бесконечнократной петлевой структуры: здесь приводится принадлежащее Беккеру и Готтлибу простое доказательство знаменитой гипотезы Адамса о $\mathcal{J}$-функторе и операциях ψ в K-теории. Оставшиеся две главы, первая и последняя, представляют собой соответственно введение и резюме.

Книга написана в высшей степени неформально: в ней много рассуждений общего характера, острот, иронических или хвалебных реплик, которые подчас заменяют целые куски доказательств (и даже формулировок). Это не только не мешает, а скорее способствует пониманию. Книга дает верное представление о предмете, и, безусловно, ее будет достаточно для большинства читателей. Более академическое изложение теории бесконечнократных пространств петель имеется в книге Бордмана и Фогта [40], русский перевод которой вышел в 1977 г. в издательстве "Мир", и в статье Мэя [92], русский перевод которой присоединен к переводу упомянутой книги Бордмана и Фогта. Кроме того, на русский язык переведен обзор Мэя [96] (тоже неформальный, хотя и не столь эмоциональный, как книга Адамса), где в приложении переводчика освещается развитие (весьма интенсивное) теории бесконечнократных пространств петель от момента написания обзора до настоящего времени.

Книгу с удовольствием прочтут все, кто хочет познакомиться с новыми плодотворными идеями современной алгебраической топологии.

Д.Б. Фукс

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла из лекций, прочитанных мной в Принстонском институте высших исследований весной 1975 г. на чтениях памяти Германа Вейля. Я рад возможности поблагодарить организаторов за приглашение, гостеприимство и за то, что они обеспечили мне такую замечательную аудиторию. Я должен также попросить извинения за задержку при подготовке этой рукописи. Дело в том, что в последнее время в излагаемой теории был достигнут определенный прогресс, и я воспользовался возможностью сказать об этом несколько слов. Кроме того, появились и другие источники, в частности работы [96] и [99] можно рекомендовать как особенно полезные опытным топологам, желающим ознакомиться с достигнутыми результатами. Я старался, однако, дать более элементарное изложение, которое, как я надеюсь, может преподать основные идеи настолько безболезненно, насколько это возможно. В этом мне очень способствовали принстонские слушатели: чем больше я изыскивал возможностей опускать технические подробности, тем более довольными они выглядели. Если так реагировали закаленные топологи, то можно надеяться, что начинающим эти лекции послужат приятным введением в идеи, развиваемые в текущей литературе.

Я благодарен Дж. П. Мэю, Б. Дж. Сандерсону и С.Б. Придди, прочитавшим первый вариант этой книги (частично или целиком); их замечания оказались весьма полезными. Не стоит говорить, что за все имеющиеся в книге остроты ответственность несу я сам.

Дж. Ф. Адамс

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ИСТОРИЯ ВОПРОСА

§ 1.1. Введение

Я начну эту вводную главу с нескольких исторических замечаний и ряда сведений общего характера. Специалистам они хорошо известны, а неспециалистам должны дать возможность продвинуться в чтении этих записок так далеко, как они пожелают. Я обрисую в общих чертах три раздела гомотопической топологии:

(*i*) изучение бесконечнократных пространств петель;

(*ii*) изучение стабильной теории гомотопий при помощи спектров;

(*iii*) изучение обобщенных теорий гомологий и когомологий.

Я попытаюсь также разъяснить очень тесные взаимосвязи между этими тремя областями. В заключение будет приведена грубая классификация, или обзор пространств, о которых в настоящее время известно, что они являются бесконечнократными пространствами петель.

§ 1.2. Пространства петель

В этом параграфе мы познакомимся с пространствами петель. Пусть X – пространство с отмеченной точкой x_0. Под <u>пространством петель</u> ΩX мы будем понимать функциональное пространство

$$(X, x_0, x_0)^{(I, 0, 1)}$$

непрерывных отображений $\omega: I \to X$ единичного интервала $I = [0,1]$ в пространство X, переводящих 0 в x_0 и 1 в x_0. Зададим на этом пространстве компактно-открытую топологию; если нужна отмеченная точка, мы принимаем за нее постоянное отображение ω_0 в точку x_0. Функции $\omega \in \Omega X$ называются <u>петлями</u> в пространстве X.

В этом месте необходимо дать исторические пояснения. Во-первых, упомянем хорошо известную работу Морса [111]. В ней Морс рассмотрел риманово многообразие M, скажем связное; его интересовало множество геодезических в M, ведущих из точки P в точку Q. Он обнаружил связь между этим множеством геодезических и топологией пространства всех путей из P в Q; под пространством путей мы понимаем функциональное пространство

$$(M, P, Q)^{(I, 0, 1)}$$

непрерывных отображений $\omega: I \to M$, переводящих 0 в P и 1 в Q. Гомотопический тип этого пространства не зависит от точек P и Q, так что оно эквивалентно пространству ΩM. Например, возьмем в качестве M сферу S^n с обычной римановой структурой; в этом случае все геодезические, ведущие из P в Q, хорошо известны. (А именно, из P в Q можно попасть по кратчайшей геодезической, скажем длины θ; но, начав двигаться в том же направлении и не остановившись, когда уже можно было остановиться, можно попасть в Q по геодезической длины $2n\pi + \theta$; начиная двигаться в противоположном направлении, мы получим геодезические длины $2n\pi - \theta$.) Этого вполне хватило Морсу для вычисления гомологических групп $H_*(\Omega S^n)$ пространства петель ΩS^n. Проводя свое рассуждение в противоположном направлении, он показал, что если взять сферу S^n и задать на ней любую другую риманову структуру, то все равно найдется бесконечно много геодезических, соединяющих P с Q.

Во-вторых, имеется хорошо известная работа Серра [129]. В ней Серр обобщил теорему о существовании бесконечного множества геодезических из P в Q, заменив сферу S^n произвольным римановым многообразием, гомологии которого отличны от гомологий точки, причем этот результат - лишь одно из замечательных достижений этой работы Серра и, возможно, некоторые другие даже более важны; я имею в виду прежде всего развитые Серром методы.

Чтобы лучше разобраться в строении пространства петель ΩX, Серр ввел пространство путей

$$EX = (X, x_0)^{(I,0)},$$

т.е. пространство непрерывных отображений $f\colon I \to X$, переводящих 0 в x_0. Пространство EX стягиваемо, но оно является важным промежуточным звеном между ΩX и X. Серр определил непрерывное отображение

$$p\colon EX \to X$$

формулой $p(f) = f(1)$, т.е. отображение p относит каждому пути его конец. Он показал, что это отображение p обладает свойством накрывающей гомотопии для отображений кубов; теперь мы называем такие отображения расслоениями в смысле Серра. Слой $p^{-1}x_0$ есть в точности пространство петель ΩX. Итак, имеется расслоение Серра

$$\Omega X \to EX \xrightarrow{p} X.$$

(Здесь стоит сделать маленькое замечание об обозначениях. Из чувства исторической справедливости я следую обозначениям Серра, который использовал букву E. Однако многие теперь употребляют обозначение PX, производя его от английского термина path-space.)

Построения такого рода обладают большой потенциальной общностью; отправляясь от них, Бурбаки показал впоследствии, что любое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ можно заменить расслоением в смысле Серра. Для этого достаточно заменить X некоторым другим пространством, которое ему гомотопически эквивалентно, а пространство Y можно не менять.

Серр показал также, что в этой ситуации хорошо работает аппарат спектральных последовательностей Лере. Использование спектральных последовательностей в гомологических вычислениях придало методам Серра большую техническую мощь, и они оказались очень успешными; если добавить к этому, что работа Серра очень элегантна и ясно изложена, то не будет удивительно, что его методы приобрели широкую популярность.

Прежде чем продолжать, напомню еще об одном давно известном фундаментальном факте. Пожалуй, самое первое, что

специалисты по теории гомотопий узнают о пространствах петель,- это то, что они позволяют манипулировать гомотопическими группами, сдвигая их из одной размерности в другую. А именно,

$$\pi_i(\Omega X) \cong \pi_{i+1}(X).$$

Этот изоморфизм можно обобщить. Пусть W - еще одно пространство с отмеченной точкой w_0. Тогда отображения

$$f : W \to X^I$$

взаимно однозначно соответствуют отображениям

$$g : W \times I \to X,$$

причем это соответствие осуществляется по правилу

$$(fw)(t) = g(w, t) \quad (w \in W,\ t \in I).$$

Привлекая отмеченные точки, мы находим, что отображения

$$f : W, w_0 \to \Omega X, \omega_0$$

взаимно однозначно соответствуют отображениям

$$g : \Sigma W, \sigma_0 \to X, x_0.$$

Здесь через ΣW обозначено факторпространство, полученное из $W \times I$ отождествлением подпространства $(W \times 0) \cup (w_0 \times I) \cup (W \times 1)$ в одну точку, которая становится отмеченной точкой σ_0 в ΣW. Это факторпространство называется приведенной надстройкой над W; часто ее обозначают через SW.

Так или иначе, переходя к гомотопическим классам, мы получаем естественное взаимно однозначное соответствие

(1.2.1) $$[W, \Omega X] \leftrightarrow [\Sigma W, X].$$

Здесь через $[U, V]$ обозначено множество гомотопических классов отображений из U в V, причем как отображения, так и гомотопии сохраняют отмеченные точки.

2-2

В наши дни, чтобы выразить все это, говорят, что функторы Σ и Ω сопряжены. Эта терминология является относительно недавней; она принадлежит Кану [75].

В частности, за W можно принять факторпространство $I^n/\partial I^n$, где I^n – единичный куб в $\mathbb{R}^n$, а ∂I^n – его граница. Тогда

$$\Sigma W = I^n \times I/(I^n \times 0) \cup (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times 1) = I^{n+1}/\partial I^{n+1},$$

и наше взаимно однозначное соответствие превращается в изоморфизм

$$(1.2.2) \qquad \pi_n(\Omega X) \cong \pi_{n+1}(X).$$

Конечно, нужно еще объяснить, зачем топологам требуется сдвигать размерности гомотопических групп; это – тема следующего параграфа.

§ I.3. Стабильная теория гомотопий

В этом параграфе я расскажу о стабильной теории гомотопий и о спектрах.

Топологи проводят фундаментальное различие между стабильными и нестабильными явлениями; явление называется стабильным, если оно проявляется в любой или любой достаточно большой размерности, при этом, по существу, не завися от размерности. Конструкцией, изменяющей размерность, обычно является надстройка. Например, в теории гомологий справедливо равенство

$$\tilde{H}_n(W;\pi) \cong \tilde{H}_{n+1}(\Sigma W;\pi),$$

где $\tilde{H}$ обозначает приведенные гомологии. Но гораздо лучше этот принцип прослеживается в теории гомотопий, где он восходит к работе Фрейденталя [59]. Нам достаточно, чтобы W и X были достаточно хорошими пространствами, например CW-комплексами. Тогда надстройка задает отображение

$$\Sigma : [W, X] \to [\Sigma W, \Sigma X],$$

и имеет место следующая хорошо известная теорема.

ТЕОРЕМА 1.3.1. Предположим, что комплекс X $(n-1)$-связен, а комплекс W имеет размерность d; тогда отображение

$$\Sigma: [W,X] \to [\Sigma W, \Sigma X]$$

эпиморфно при $d \leqslant 2n-1$ и является взаимно однозначным соответствием при $d \leqslant 2n-2$.

Подходящим источником для изучения этой теоремы является книга [135], (особенно с. 590).

Чтобы доказать ее, заменяют стоящее справа множество $[\Sigma W, \Sigma X]$ множеством $[W, \Omega\Sigma X]$ при помощи изоморфизма (1.2.1). Получим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
{[W,X]} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[dr, "i_*"'] & {[\Sigma W, \Sigma X]} \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
 & {[W, \Omega\Sigma X]}
\end{tikzcd}$$

Здесь i_* обозначает отображение, индуцированное отображением i, а $i: X \to \Omega\Sigma X$ есть отображение, соответствующее при изоморфизме (1.2.1) тождественному отображению $1: \Sigma X \to \Sigma X$. Эта диаграмма сводит доказываемую теорему к изучению пространства петель $\Omega\Sigma X$ и связи этого пространства с пространством X; это же относится и к другим теоремам теории надстроек.

На самом деле изучение пространств петель оказалось самым плодотворным методом в теории гомотопий. Джеймсу [73] удалось заменить довольно большое функциональное пространство ΩS^n явным клеточным комплексом, настолько малым, что можно хорошо понять его структуру; я буду называть его моделью Джеймса для ΩS^n. Это привело его к новым интересным результатам о надстройке. Ботт и Самельсон [44] вычислили гомологии значительного числа пространств петель, в том числе пространства петель $\Omega(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \ldots \vee S^{n_d})$ букета сфер. Основываясь на этих вычислениях, Хилтону [63] удалось значительно продвинуться в изучении гомотопического типа пространства $\Omega(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \ldots \vee S^{n_d})$; это привело к новым результатам в теории гомотопий.

Вернемся к общему случаю. Используя обозначения теоремы 1.3.1, назовем гомотопическую классификационную задачу нахождения множества $[W, X]$ <u>стабильной</u>, если $d \leq 2n-2$, так что мы имеем в точности такую же задачу для $[\Sigma W, \Sigma X]$, для $[\Sigma^2 W, \Sigma^2 X]$ и для всех высших размерностей. Это можно обобщить, сказав, что <u>стабильная теория гомотопий</u> – это часть теории гомотопий, изучающая явления, стабильные в описанном выше интуитивном смысле.

Чтобы убедить скептиков в разумности этой теории, требовалось продемонстрировать содержащиеся в ней интересные теоремы. Хорошей рекламой для стабильной теории гомотопий послужила появившаяся достаточно рано двойственность Спеньера – Уайтхеда [137, 134]. Предположим, что нам дано хорошее пространство X, скажем конечный комплекс, и что мы рассматриваем непатологическое вложение пространства X в сферу S^n, т.е. такое вложение, при котором дополнение $\mathscr{C}X$ пространства X в S^n деформационно ретрагируется на некоторый конечный комплекс Y и, обратно, $\mathscr{C}Y$ деформационно ретрагируется на X. Тогда, согласно теореме двойственности Александера, гомологии и когомологии комплекса Y определяются комплексом X и не зависят от вложения X в S^n. С другой стороны, фундаментальная группа $\pi_1(Y)$ не определяется пространством X и зависит от вложения; достаточно рассмотреть $X = S^1$, $n = 3$ (классические узлы).

Возникает вопрос: в какой мере пространство Y определяется пространством X? Оказывается, что X определяет стабильный гомотопический тип пространства Y. Здесь мы подразумеваем, что пространства Y и Z имеют одинаковый стабильный гомотопический тип, если при некотором целом m пространства $\Sigma^m Y$ и $\Sigma^m Z$ гомотопически эквивалентны. Иными словами, можно определить новую категорию, <u>стабильную гомотопическую категорию Спеньера – Уайтхеда</u> [136, 138], объектами которой служат конечные комплексы, а множество морфизмов $\{Y, Z\}$ определяется как множество стабильных гомотопических классов отображений из Y в Z, т.е. как

$$\lim_{m\to\infty} [\Sigma^m Y, \Sigma^m Z].$$

Согласно теореме 1.3.1, этот предел достигается; если бы комплекс Y не был конечномерным, это определение множества $\{Y, Z\}$ не годилось бы. Мы можем сказать теперь, что комплексы Y и Z имеют одинаковый стабильный гомотопический тип в точности тогда, когда они эквивалентны в стабильной гомотопической категории.

Теперь вопрос о вложениях в сферу S^n можно решить более явно, сказав, что Y зависит от X через посредство контравариантного функтора $D = D_n$. Этот функтор $D = D_n$ принимает значения в стабильной гомотопической категории Спеньера – Уайтхеда; он определен на полной подкатегории этой категории, поскольку задается на всех объектах X, допускающих вложения в S^n, и на всех морфизмах категории, связывающих такие объекты X. Спеньер и Уайтхед называют комплекс $D_n X$ n-двойственным комплексу X.

Вскоре, однако, обнаружилось, что стабильная гомотопическая категория, построенная Спеньером и Уайтхедом, содержит недостаточное для некоторых целей количество объектов (даже если ослабить предположение о конечности комплексов). Яркий пример такой ситуации доставила работа Тома о кобордизмах [151]. Том свел изучение групп кобордизмов к изучению некоторых стабильных гомотопических групп:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{n+r}(MO(n)), \quad \lim_{n\to\infty} \pi_{n+r}(MSO(n)) \text{ и т.д.}$$

Здесь $MO(n)$, $MSO(n)$ и т.д. – пространства, построенные Томом и обычно называемые <u>комплексами Тома</u>; пределы $\lim\limits_{n\to\infty}$ определены, поскольку пространства $MO(n)$, $MSO(n)$ и т.д. определяются вместе с отображениями

$$\Sigma MO(n) \to MO(n+1), \quad \Sigma MSO(n) \to MSO(n+1) \text{ и т.д.}$$

Милнор первым высказал мысль (см. [104], особенно с. 511–512), что положение дел значительно прояснилось бы, если бы удалось найти категорию, в которой вместо последовательности пространств $MO(n)$ можно было бы рассматривать единый объект $\mathbf{MO}$, аппроксимируемый этой последовательностью, и которая включала бы аналогичные объекты $\mathbf{MSO}$ и т.д. Но такой подход был уже известен [81, 82]. Для наших целей подходит <u>спектр</u> $\mathbf{E}$ – последовательность пространств E_n (с отмеченной точкой), наделенных отображениями $\varepsilon_n : \Sigma E_n \to E_{n+1}$. Например, пространства $MO(n)$ с отображениями $\Sigma MO(n) \to MO(n+1)$ составляют спектр – <u>спектр Тома</u> $\mathbf{MO}$. Аналогично обстоит дело для $\mathbf{MSO}$. Другой пример: рассмотрим CW-комплекс X с отмеченной точкой; его <u>надстроечный спектр</u> определяется как спектр, у которого n-е пространство есть $\Sigma^n X$, а отображениями являются тождественные отображения $\Sigma(\Sigma^n X) = \Sigma^{n+1} X$.

Этот спектр мы будем обозначать через $\Sigma^\infty X$. Хотелось бы сказать, что эта конструкция определяет функтор Σ^∞ из CW-комплексов в спектры. Конечно, для этой цели (и для многих других целей) нам нужно ввести категорию спектров. Для этого осталось правильно определить отображение спектра в спектр, что наталкивается на небольшие технические трудности. В настоящее время общепризнано, что наиболее удобны для стабильной теории гомотопий категория спектров, построенная Бордманом [34, 35, 36, 153], и некоторые другие категории, которые ей эквивалентны. Я попытался дать по возможности элементарное описание этой категории в статье [9] (см. в особенности с. 131–146). Здесь я приведу следующие извлечения из этой работы.

(i) Под CW-спектром понимается спектр, в котором каждое пространство E_n является CW-комплексом (с отмеченной точкой), а каждое отображение $\varepsilon_n\colon \Sigma E_n \to E_{n+1}$ осуществляет вложение ΣE_n в E_{n+1} в качестве подкомплекса. Эти CW-спектры можно принять за объекты нужной категории.

(ii) Σ^∞ есть функтор; для любого конечномерного комплекса X этот функтор индуцирует взаимно однозначное соответствие

$$\lim_{n\to\infty}[\Sigma^n X, \Sigma^n Y] \to [\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y].$$

(Здесь $[\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y]$ обозначает множество гомотопических классов отображений в категории CW-спектров.)

(iii) Категория CW-спектров устроена таким образом, что в ней осуществимы все конструкции, которые обычно производятся над CW-комплексами.

(iv) Категория CW-спектров может быть при желании сделана градуированной. Пусть $\mathbf{E}$ – спектр; изменяя индексы, можно получить из него новый спектр; например, можно определить спектр $\mathbf{F}$ равенством $F_n = E_{n+1}$. Тогда отображением степени 1 из $\mathbf{E}$ в $\mathbf{G}$ будет обычное отображение (степени 0) из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{G}$. Обозначим через $[X, Y]_n$ множество гомотопических классов отображений степени n из X в Y.

Этого достаточно, чтобы понять существо дела. Важно лишь знать, что существует хорошая категория спектров, и уметь проявлять гибкость при описании деталей конструкции. В действительности имеются различные способы ее детализации; все они приводят к достаточно хорошим категориям, но в конкретных ситуациях одна может оказаться предпочтительней другой. Поэтому оставим за собой право выбора.

На этом мы закончим наш экскурс в стабильную гомотопическую теорию и в теорию спектров; мы готовы теперь к тому, чтобы вернуться назад, к пространствам петель.

§ 1.4. Бесконечнократные пространства петель

В этом параграфе мы познакомимся с бесконечнократными пространствами петель.

Пространство петель лучше обыкновенного пространства; не всякое пространство гомотопически эквивалентно пространству петель. Например, не всякое пространство является H-пространством, а пространство петель им является. Напомню, что пространство X называется <u>H-пространством</u>, если в нем задано умножение

$$\mu\colon X \times X \to X,$$

удовлетворяющее надлежащим аксиомам. Эквивалентным образом, можно предполагать, что для каждого W на множестве $[W, X]$ задано умножение, причем это умножение естественно относительно W. Минимальное требование к этому умножению заключается в том, чтобы постоянное отображение из W в отмеченную точку X было единицей; это эквивалентно требованию, чтобы отмеченная точка в X была (с точностью до гомотопии) единицей умножения μ. (Предполагается, что отображения и гомотопии сохраняют отмеченную точку.)

Пространство петель $X = \Omega Y$, очевидно, является H-пространством. В самом деле, умножение $\mu\colon \Omega Y \times \Omega Y \to \Omega Y$ можно задать явной формулой

$$(\mu(\omega', \omega''))(t) = \begin{cases} \omega'(2t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \omega''(2t-1), & \text{если } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом, произведение двух петель есть такая петля, для которой точка за первую половину времени пробегает с удвоенной скоростью петлю ω', а за вторую половину – петлю ω''. С другой стороны, заменяя множество $[W, \Omega Y]$ множеством $[\Sigma W, Y]$ или, что эквивалентно, фундаментальной группой функционального

пространства

$$(Y, y_0)^{(W, w_0)},$$

мы видим, что $W \to [W, \Omega Y]$ есть функтор из пространств в группы.

Понятие H-пространства восходит к Серру [129], выбравшего букву H, чтобы отметить вклад Хопфа (Hopf) в топологию групп Ли. Сейчас H-пространствам посвящено большое количество публикаций. Замечание, что пространство петель есть H-пространство, также принадлежит Серру.

Пусть X – некоторое H-пространство. Умножение $\mu: X \times X \to X$ позволяет определить произведение Понтрягина классов гомологий в $H_*(X)$ [44]. Эта мультипликативная структура служит ключом к пониманию гомологий таких H-пространств, как ΩS^n и $\Omega(S^{n_1} \vee \vee S^{n_2} \vee \ldots \vee S^{n_d})$. А именно, $H_*(\Omega S^n)$ есть свободная алгебра (над $\mathbb{Z}$) с одной образующей степени $n-1$; аналогично $H_*(\Omega(S^{n_1} \vee \vee S^{n_2} \vee \ldots \vee S^{n_d}))$ – свободная алгебра (над $\mathbb{Z}$) с образующими степеней $n_1-1, n_2-1, \ldots, n_d-1$. Здесь алгебры предполагаются ассоциативными, но не предполагаются коммутативными.

Конструкция пространства петель допускает, конечно, итерации. При этом мы получаем

$$\Omega^2 X = \Omega(\Omega X) = (X, x_0)^{(I^2, \partial I^2)}$$

и т.д. Если уже само пространство петель является необычайно хорошим пространством, то <u>двукратное пространство петель</u> должно быть еще лучше; не все пространства петель являются двукратными пространствами петель.

Будем называть пространство X <u>бесконечнократным пространством петель</u>, если существуют последовательность пространств $X_0, X_1, X_2, \ldots$ с $X_0 = X$ и слабые гомотопические эквивалентности

$$X_n \xrightarrow{\simeq} \Omega X_{n+1}.$$

Напомню, что отображение $f: X \to Y$ одного связного пространства в другое называется <u>слабой гомотопической эквивалентностью</u>, если для всех r

$$f_*: \pi_r(X) \to \pi_r(Y)$$

есть изоморфизм. Из этого условия вытекает, что

$$f_*: [W, X] \to [W, Y]$$

есть изоморфизм для всех CW-комплексов W. Если X и Y несвязны, то мы в первую очередь требуем, чтобы отображение

$$f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

было взаимно однозначным соответствием, а затем налагаем предыдущее требование на каждую компоненту линейной связности.

Слабые гомотопические эквивалентности служат здесь для преодоления мелких технических неудобств. Например, зная лишь, что пространство ΩS^n и его модель Джеймса слабо гомотопически эквивалентны, мы можем получить все интересующие нас теоремы, не доказывая, что они в действительности гомотопически эквивалентны.

Вернемся к нашей последовательности пространств $X_0, X_1, X_2, \ldots$ Каждая слабая гомотопическая эквивалентность

$$X_n \to \Omega X_{n+1}$$

может быть, разумеется, преобразована при помощи (1.2.1) в отображение

$$\Sigma X_n \to X_{n+1}.$$

Поэтому такая последовательность пространств представляет собой спектр. Введем название для таких спектров. Пусть $\mathbf{E}$ - спектр. Преобразуем его структурные отображения

$$\varepsilon_n: \Sigma E_n \to E_{n+1}$$

в отображения

$$\varepsilon'_n: E_n \to \Omega E_{n+1}.$$

Будем называть $\mathbf{E}$ <u>Ω-спектром</u>, если отображения ε'_n являются слабыми гомотопическими эквивалентностями. Если спектр $\mathbf{E}$ является Ω-спектром, то он обладает следующим специальным свойством:

$$[\Sigma^\infty X, \mathbf{E}]_n = [X, E_n].$$

3-2

Таким образом, можно сказать, что бесконечнократное пространство петель X есть нулевой член некоторого Ω-спектра $\mathbf{X} = \{X_n\}$.

В случае необходимости пространства X_n можно заменить такими слабо гомотопически эквивалентными пространствами, для которых будут иметь место даже гомеоморфизмы $X_n \cong \Omega X_{n+1}$ [89]. В действительности при определении Ω-спектра в известном отношении лучше потребовать, чтобы структурные отображения

$$\varepsilon'_n : E_n \to \Omega E_{n+1}$$

были гомеоморфизмами, а не просто слабыми гомотопическими эквивалентностями. Особенно удобно это требование в теории бесконечнократных пространств петель, в которой геометрическая наглядность такого определения часто позволяет избегать мелких погрешностей в доказательствах. К тому же это требование не препятствует построению хорошей категории Ω-спектров. Но, поскольку наша ближайшая цель - выяснить связь с теорией гомотопий, это замечание пока несущественно.

Приведем несколько примеров бесконечнократных пространств петель. Первый и наиболее важный пример - пространства Эйленберга - Маклейна. Пусть π - абелева группа, и пусть X_n - комплекс Эйленберга - Маклейна типа (π, n), т.е.

$$\pi_r(X_n) = \begin{cases} \pi, & \text{если } r = n, \\ 0, & \text{если } r \neq n. \end{cases}$$

Формула (1.2.2) показывает, что ΩX_{n+1} также имеет тип (π, n); следовательно, существует гомотопическая эквивалентность $X_n \to \Omega X_{n+1}$. Таким образом, любое пространство Эйленберга - Маклейна является бесконечнократным пространством петель.

Следующий пример - пространство $\mathbb{Z} \times BU$; здесь BU можно представлять себе либо как классифицирующее пространство бесконечномерной унитарной группы $U = \bigcup_n U(n)$, либо как предел классифицирующих пространств $\lim\limits_{n\to\infty} BU(n)$. Согласно теореме периодичности Ботта [42, 43, 50, 18], существует слабая гомотопическая эквивалентность

$$\mathbb{Z} \times BU \simeq \Omega^2(\mathbb{Z} \times BU);$$

поэтому $\mathbb{Z} \times BU$ - бесконечнократное пространство петель. Подобное верно и для $\mathbb{Z} \times BO$.

Оба эти примера возникают в обобщенных теориях когомологий, но это предмет следующего параграфа.

§ 1.5. Обобщенные теории когомологий

В этом параграфе я расскажу об обобщенных теориях когомологий.

Будет предполагаться более или менее известным, что обобщенная теория гомологий или когомологий представляет собой функтор, удовлетворяющий первым шести аксиомам Эйленберга – Стинрода, но, вообще говоря, не удовлетворяющий седьмой аксиоме – аксиоме размерности. В случае необходимости можно добавить аксиому сильной аддитивности Милнора [106]. Рассматриваемые мною гомологические и когомологические функторы определяются сначала на CW-комплексах.

Можно смело утверждать, что изучение и применение таких функторов представляет интерес для топологов. Чаще всего используются функторы следующих трех типов.

(i) Обычные, или классические, гомологии и когомологии.

(ii) Различные варианты K-теории.

(iii) Многочисленные варианты бордизмов и кобордизмов.

Вероятно, стоит особо выделить также ковариантный функтор стабильных гомотопий. Можно сказать, впрочем, что он фигурирует в п.(iii) приведенного выше списка в облачении теории оснащенных бордизмов; но специалисты по гомотопической топологии считают его более элементарным и особенно важным для своего предмета. Стабильные гомотопические группы комплекса X можно определить формулой

$$\pi_n^S(X) = \{S^n, X\} = \lim_{m\to\infty}[S^{m+n}, \Sigma^m X] =$$

$$= [\Sigma^\infty S^0, \Sigma^\infty X]_n$$

Вообще можно определить гомотопические группы спектра $\mathbf{X}$ (которые автоматически будут стабильны) формулой

$$\pi_n(\mathbf{X}) = [\Sigma^\infty S^0, \mathbf{X}]_n.$$

Оказывается, что эти функторы удовлетворяют аксиомам теории гомологий. Соответствующий контравариантный функтор – теория стабильных когомотопических групп. Этот функтор играет в стабильной гомотопической топологии совершенно особенную роль: формально

говоря, он является инициальным объектом в категории теорий подходящего вида; однако, говоря неформально, можно признать, что этот функтор содержит в себе значительную информацию, но в то же время чрезвычайно неудобен для вычисления.

§ 1.6. Соотношения между спектрами и обобщенными теориями когомологий

Теперь я приступаю к выяснению связей между некоторыми из введенных мной понятий.

Предположим для начала, что нам дана некоторая теория когомологий k^*. Перечислим ее непременные атрибуты.

(i) Каждому пространству X с отмеченной точкой x_0 и каждому целому n наша теория ставит в соответствие (приведенную) группу когомологий $\tilde{k}^n(X)$. (Здесь слово "пространство" означает CW-комплекс.)

(ii) Каждому отображению $f: X, x_0 \to Y, y_0$ она относит индуцированный гомоморфизм

$$f^*: \tilde{k}^n(X) \leftarrow \tilde{k}^n(Y):$$

(iii) Каждому пространству X с отмеченной точкой x_0 она ставит в соответствие изоморфизм

$$\sigma: \tilde{k}^n(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{k}^{n+1}(\Sigma X).$$

Эти $\tilde{k}^n(\ )$, f^* и σ обладают свойствами, которые легко вывести, если угодно, из аксиом Эйленберга - Стинрода и аксиомы аддитивности Милнора. По-другому аксиоматику теории когомологий можно построить в терминах $\tilde{k}^n(\ )$, f^* и σ, приняв их обычные свойства за аксиомы. Мы не будем останавливаться на точной формулировке этих свойств; отметим только, что они позволяют воспользоваться теоремой Брауна о представимости [48, 49]. Эта теорема утверждает, что контравариантные функторы из CW-комплексов в категорию множеств, которые удовлетворяют некоторым условиям, имеют вид $[\ ,Y]$.

Если вы позволите мне немного некорректное упрощение, которое я исправлю позднее, я скажу, что существуют CW-комплексы Y_n и взаимно однозначные соответствия

$$\tilde{k}^n(X) \longleftrightarrow [X, Y_n],$$

заданные для CW-комплексов X и естественные относительно X. Но тогда получается следующее составное взаимно однозначное

соответствие:

$$\begin{tikzcd}
{[X, Y_n]} \arrow[dd, leftrightarrow, "\cong"'] & & {[X, \Omega Y_{n+1}]} \arrow[d, "\cong"] \\
& & {[\Sigma X, Y_{n+1}]} \arrow[d, "\cong"] \\
\tilde{k}^n(X) \arrow[rr, "\sigma", "\cong"'] & & \tilde{k}^{n+1}(\Sigma X)
\end{tikzcd}$$

Это возможно только при наличии слабой гомотопической эквивалентности

$$Y_n \xrightarrow{\simeq} \Omega Y_{n+1}.$$

Таким образом, любая обобщенная теория когомологий приводит к Ω-спектру. При этом можно добиться того, чтобы этот Ω-спектр лежал в хорошей категории спектров.

Некорректность состоит в игнорировании того обстоятельства, что теорема Брауна применима только к связным комплексам X. С ней можно справиться ценой небольшого усложнения рассуждений; подробности см. в [9], с. 131-134.

В качестве примера приведенной выше общей конструкции рассмотрим случай, когда k^* есть обычная теория когомологий с коэффициентами в группе π,

$$k^n(X) = H^n(X;\pi).$$

Тогда

$$\tilde{k}^n(X) = \tilde{H}^n(X;\pi) = [X, Y_n],$$

где Y_n – комплекс Эйленберга – Маклейна типа (π, n). Соответствующим Ω-спектром является спектр Эйленберга – Маклейна группы π.

Аналогично, принимая за k^* комплексную K-теорию, получим Ω-спектр, четными членами которого являются пространства $\mathbb{Z} \times BU$, а нечетными членами – пространства U. Похожее утверждение верно для вещественной K-теории и пространств $\mathbb{Z} \times BO$.

Все эти конструкции обратимы. В знаменитой статье [155] Уайтхед показал, что любой спектр определяет теорию гомологий и теорию когомологий. При этом оказывается, что спектр Тома

MO, хотя и не является Ω-спектром, определяет вещественные неориентированные бордизмы и кобордизмы; спектр Тома MSO определяет вещественные ориентированные бордизмы и кобордизмы; сферический спектр $\Sigma^\infty S^0$ определяет стабильные гомотопии и когомотопии и т.д.

Вот хорошее определение E-когомологий, пригодное для произвольного CW-комплекса X:

$$\tilde{E}^n(X) = [\Sigma^\infty X, E]_{-n}.$$

Конечно, это определение немедленно обобщается и дает E-когомологии спектров: если X – спектр, то по определению

$$\tilde{E}^n(X) = [X, E]_{-n}.$$

Недолго думая, можно было бы определить E-гомологии при помощи двойственности Александера; а именно попытаемся положить для конечного комплекса X

$$\tilde{E}_q(X) = \tilde{E}^{n-q-1}(Y),$$

где комплекс Y двойствен X в S^n в смысле Спеньера – Уайтхеда. Однако стоит привести это определение к такому виду, в котором оно могло бы быть обобщено. Одно из таких определений, пригодное для произвольного CW-комплекса X, таково:

$$\tilde{E}_q(X) = \lim_{n\to\infty} \pi_{n+q}(E_n \wedge X).$$

Приведенное произведение $W \wedge X$ определяется равенством

$$W \wedge X = W \times X / (W \times x_0) \cup (w_0 \times X),$$

где w_0 и x_0 – отмеченные точки в W и X.

Группы коэффициентов когомологической теории k^* задаются когомологиями k^n точки, т.е. когомологиями $\tilde{k}^n(S^0)$; поэтому для E-когомологий группами коэффициентов являются группы

$$\tilde{k}^n(S^0) = \tilde{E}^n(S^0) = [\Sigma^\infty S^0, E]_{-n} = \pi_{-n}(E),$$

гомотопические группы спектра E. (Для гомологий дело обстоит

аналогично.) Это равенство можно рассматривать как условие, которому должен удовлетворять спектр E, представляющий данную теорию когомологий k^*.

По-видимому, самое время предостеречь читателя. Группы коэффициентов $k^n(S^0)$ обобщенной теории когомологий могут быть ненулевыми для многих значений n, как положительных, так и отрицательных; например, в случае K-теории эти группы равны $\mathbb{Z}$ для всех четных n- положительных, отрицательных или равных нулю. Поэтому так же обстоит дело и с гомотопическими группами соответствующего представляющего спектра. В частности, если мы захотим применить теорему Гуревича, возникает затруднение: для спектра X не всегда существует такая размерность d, что $\pi_i(X)=0$ при $i<d$. Если d, для которого $\pi_i(X)=0$ при $i<d$, существует, то спектр X называется <u>ограниченным снизу</u>. Некоторые авторы называют спектр X <u>связным</u>, если он ограничен размерностью $d=0$, т.е. $\pi_i(X)=0$ при $i<0$.

Итак, мы обнаружили, что по любой теории когомологий можно построить некоторый спектр, а по каждому спектру можно построить теорию когомологий. Чтобы убедиться в том, что области спектров и теорий когомологий, по существу, эквивалентны, нужно проверить, что приведенные конструкции, по существу, взаимно обратны.

Если мы начнем с некоторой теории когомологий, построим представляющий спектр, а затем рассмотрим соответствующую этому спектру теорию когомологий, то мы, с точностью до изоморфизма, вернемся к исходной теории когомологий.

Обратно, построим по данному спектру E соответствующую теорию когомологий E^*, а затем представляющий эту теорию Ω-спектр F. Тогда гомотопические группы спектров E и F совпадают (они равны группам коэффициентов теории E^*). Можно показать, что в действительности спектры E и F эквивалентны.

(Можно возразить, что данное рассуждение неполно, так как оно сосредоточено на объектах и ничего не говорит о морфизмах; "следовало бы" показать, что обе конструкции функториальны. Однако это привело бы к таким вопросам, которых мне бы не хотелось касаться, так что лучше перейти к другой теме.)

§ 1.7. Соотношения между спектрами и бесконечнократными пространствами петель

Продолжим выяснение взаимосвязей между некоторыми из введенных понятий.

Мы только что убедились, что произвольный спектр $\mathbf{E}$ можно заменить эквивалентным ему Ω-спектром $\mathbf{F}$. В действительности ничто не мешает прямо построить $\mathbf{F}$ по $\mathbf{E}$: достаточно положить

$$F_n = \lim_{m\to\infty} \Omega^m E_{n+m}.$$

Но мы предпочитаем воспользоваться конструкцией, приведенной в конце § 1.6, и определить $\Omega^\infty \mathbf{E}$ как нулевой член F_0 представляющего теорию E^* Ω-спектра. Возникает составное взаимно однозначное соответствие:

$$\begin{array}{ccc} [X, \Omega^\infty \mathbf{E}] & = & [X, F_0] \\ & & \updownarrow \cong \\ [\Sigma^\infty X, \mathbf{E}] & = & \tilde{E}^0(X) \end{array}$$

Таким образом, Ω^∞ есть функтор из категории спектров в категорию пространств, сопряженный функтору Σ^∞ из категории пространств в категорию спектров. Значениями функтора Ω^∞ являются бесконечнократные пространства петель.

Некоторые авторы используют символ Ω^∞ для другого объекта. Однако они вряд ли не согласятся с тем, что полезно иметь два сопряженных функтора - из категории пространств в категорию спектров и из категории спектров в категорию пространств. Эти функторы я и предлагаю обозначать через Σ^∞ и Ω^∞. В свою очередь я согласен с тем, что мой функтор Ω^∞ можно разложить в композицию двух функторов: (i) функтора, относящего спектру $\mathbf{E}$ эквивалентный Ω-спектр $\mathbf{F}$, и (ii) функтора перехода от Ω-спектра $\mathbf{F}$ к пространству F_0. Для наших теперешних целей важнее шаг (ii), переход от спектров к пространствам. Что касается функтора (i), я бы предпочел оставить его в подходящем для него месте - в "черном ящике".

Все же кажется, что сказанного недостаточно, чтобы установить сколь-нибудь тесную связь между спектрами и бесконечнократными пространствами петель: ведь применение функтора Ω^∞ может быть сопряжено с потерей информации.

Когда какой-нибудь автор говорит: "X есть бесконечнократное пространство петель", он обычно подразумевает, что им построен некоторый определенный Ω-спектр $\mathbf{X}$ с нулевым членом X. При этом читатель может ощутить потребность в дополнительной информации об этом Ω-спектре; о каком из многих неэквивалентных Ω-спектров с данным нулевым членом толкует автор? И будьте уверены, вы найдете больше смысла в его доказа-

тельстве, чем в его формулировке. Или же автор говорит: "Такой-то функтор $\tilde{k}^0$ является нулевым членом обобщенной теории когомологий"; должно быть, он построил такую теорию когомологий, но как нам узнать – какую? Или еще иной автор говорит: "Пространства X и Y являются бесконечнократными пространствами петель, но мне неизвестно, является ли такое-то отображение $f\colon X \to Y$ бесконечнократным петлевым отображением". Он подразумевает, что им построены спектры $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, причем $X=\Omega^\infty\mathbf{X}$ и $Y=\Omega^\infty\mathbf{Y}$, но неизвестно, существует ли такое отображение $\mathbf{f}\colon\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ одного из этих спектров в другой, что $f = \Omega^\infty\mathbf{f}$. Как нам помочь ему, если мы не можем описать в удобных терминах эти спектры $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$?

Чтобы в какой-то мере исправить положение, можно попытаться сделать функтор Ω^∞ более информативным. Пусть, например, $\mathbf{X}$ есть Ω-спектр; тогда пространство ΩX_1 (будучи пространством петель) является H-пространством, и гомотопическая эквивалентность $X_0 \xrightarrow{\simeq} \Omega X_1$ переносит эту H-структуру на X_0. (Например, в случае комплексной K-теории H-структура на $\mathbb{Z}\times BU$ отвечает суммированию векторных расслоений по Уитни; аналогично обстоит дело с вещественной K-теорией и пространством $\mathbb{Z}\times BO$.) Таким образом, можно считать, что функтор Ω^∞ принимает значения в категории H-пространств, а не в категории пространств. Теперь функтор Ω^∞ теряет меньше информации. Но это лишь первый шаг в правильном направлении. Обычно Ω^∞ определяется как функтор, принимающий значения в категории пространств со столь богатыми дополнительными структурами, что при его применении вообще не происходит никакой потери информации. (Набросок этой процедуры я приведу в гл. 2.) В этом смысле изучение бесконечнократных пространств петель, по существу, эквивалентно изучению спектров.

С этой точки зрения может показаться делом вкуса и удобства, говорить ли о свойствах и инвариантах, относящихся к спектру $\mathbf{X}$ или к пространству $\Omega^\infty\mathbf{X}$. Я имею в виду в первую очередь инварианты пространства $\Omega^\infty\mathbf{X}$, отражающие бесконечнократную петлевую структуру, такие, например, как гомологические операции Кудо и Араки [77, 78] и Дайера и Лашофа [55] или как трансфер, который мы рассмотрим в гл. 4. Здесь же я просто хочу подчеркнуть, что полезно сочетать оба подхода.

Предположим, например, что задано отображение $\mathbf{f}\colon\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ одного связного спектра в другой и нам нужно доказать эпиморфность индуцированного отображения гомотопических групп $\mathbf{f}_*\colon \pi_*(\mathbf{X})\to\pi_*(\mathbf{Y})$. Для этого вполне достаточно проверить соответ-

4-2 7168

ствующее утверждение для гомоморфизма

$$(\Omega^\infty f)_*: \pi_*(\Omega^\infty X) \to \pi_*(\Omega^\infty Y).$$

Вполне возможно, что нам удастся найти такое отображение g: $\Omega^\infty X \leftarrow \Omega^\infty Y$, которое может и не быть бесконечнократным петлевым отображением, но для которого

$$(\Omega^\infty f)g \simeq 1: \Omega^\infty Y \to \Omega^\infty Y.$$

Этого вполне достаточно. Причем описанная ситуация не является искусственной, например, именно таково положение дел в случае теоремы Кана – Придди [74]. Подробности, связанные с теоремой Кана – Придди, приведены в § 4.1, а последнее замечание комментируется в [8]. Поэтому можно извлечь выгоду из соединения, казалось бы, несовместимого – нестабильной и стабильной теорий гомотопий – и рассмотрения одной и той же задачи с разных позиций. Другими словами, если мы хотим получить что-либо интересное, мы должны двигаться по пути, указываемому геометрией.

§ 1.8. Обзор примеров

В заключение я приведу грубую классификацию известных к настоящему времени бесконечнократных пространств петель по трем основным типам.

Конечно, эти три типа перекрываются, и взаимосвязи между ними будут исследоваться в заключительных главах. Но все же можно сказать, что известные сейчас бесконечнократные пространства петель принадлежат следующим трем группам.

(*i*) Пространства, которые строятся по способу, описанному в § 1.6, по обобщенным теориям когомологий, таким, как обычные когомологии, K-теория, кобордизмы и их различные варианты.

(*ii*) Пространства, которые можно построить методами стабильной теории гомотопий с помощью различных конструкций над спектрами и функтора Ω^∞.

(*iii*) Пространства, которые можно построить, используя специальный аппарат, рассматриваемый в гл. 2.

Описанная в гл. 2 процедура обычно приводит к связному спектру $\mathbf{E}$; поэтому, если в приводимых ниже описаниях не указаны группы коэффициентов $\pi_n(\mathbf{E})$ при $n < 0$, не нужно этому удивляться: подразумевается, что эти группы тривиальны.

Источником наиболее интересных примеров служат следующие три подтипа типа (iii).

($iiia$) Пространства, отражающие геометрию многообразий.

($iiib$) Пространства, связанные с группами единиц в кольцах когомологий.

($iiic$) Пространства, связанные с алгебраической K-теорией.

Начнем с ($iiia$). При изучении кусочно-линейных и топологических многообразий необходимо построить адекватную теорию расслоений. Стабильные теории таких расслоений оказываются представимыми функторами с представляющими пространствами BPL и $BTop$. Доказательство существования пространства BPL обычно приписывается Милнору [105], но более доступным источником является статья [110]. Существование $BTop$ неявно подразумевается в [108]. Можно также ввести пространство, обозначаемое в разных местах через BF, BG или BH. Это – классифицирующее пространство (стабильной) чисто гомотопической теории расслоений, которая изучает классы послойно гомотопически эквивалентных расслоений со слоями, гомотопически эквивалентными сферам [104]. Соответствующие "группы" PL, Top и F в некотором смысле существуют. То же самое можно сказать о "факторпространствах", таких, как F/PL и PL/O, но сейчас нет необходимости вникать в детали.

Непосредственным следствием сказанного является то, что BPL, $BTop$ и BF – бесконечнократные пространства петель Этот результат анонсировали Бордман и Фогт в [39]; полное доказательство было приведено в [40], однако там авторы предпочли не касаться случая BPL (см. [40], с. 216–217). Случай BPL разобран в работе [99]. Далее, утверждение о том, что эти пространства являются бесконечнократными пространствами петель, нуждается в усилении, например H-структура на каждом из пространств BPL, $BTop$ и BF соответствует суммированию по Уитни "расслоений". После этого можно сказать, что PL-K-группа $K_{PL}(X)$ является нулевым членом теории когомологий; то же самое справедливо для $K_{Top}(X)$ и $K_F(X)$. Стоило бы усилить эту теорему, включив в нее результаты о таких факторпространствах, как F/PL; и наконец, стоило бы показать, что некоторые отображения, такие, например, как каноническое отображение $BPL \to BTop$, являются бесконечнократными петлевыми отображениями, т.е. принадлежат образу функтора Ω^∞ (см. § 1.7).

Подобные замечания приложимы и к "специальным" аналогам SPL, $BTop$ и SF "групп" PL, Top и F. Но можно

пойти и еще дальше. Пусть имеется обобщенная теория когомологий k^* и (скажем) векторное расслоение ξ над X с тотальным пространством E, и пусть E_0 – дополнение нулевого сечения. Ориентацией расслоения ξ над k^* мы называем элемент

$$u \in k^*(E, E_0),$$

ограничение которого на любой слой F в E

$$i^* u \in k^*(F, F_0)$$

является образующей. Конечно, нужно еще пояснить, что значит "образующая", и наложить некоторые условия на теорию k^*. Допустим, что это сделано. Тогда получается теория расслоений, в которой рассматриваются векторные расслоения, заданные вместе с ориентацией над k^*. Аналогично можно действовать и в случае расслоений, более общих, чем векторные. Из таких ориентированных расслоений мы строим K-группу. Хотелось бы сформулировать и доказать теорему, что эта группа является нулевым членом некоторой теории когомологий, как это происходит в случае K_{PL} и K_{Top}. Все это сделано в работе [99].

Поскольку ориентация является исходным пунктом многих когомологических конструкций, следует ожидать, что эти K-группы будут естественными областями значений содержательных инвариантов.

Теперь попробуем продвинуться в направлении (iiib). Многие преобразования, которые применяют при изучении геометрии многообразий, переводят сложение в умножение. Рассмотрим, например, полный класс Чженя $c(\xi)$. Этот класс определен, если ξ есть $U(n)$-расслоение над некоторым пространством X, а также если ξ есть элемент группы $K(X)$ причем

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cdot c(\eta).$$

Если мы хотим построить группу, в которой лежат значения функции c, естественно обратиться к множеству формальных рядов

$$1 + x_2 + x_4 + x_6 + \dots,$$

где $x_{2q} \in H^{2q}(X)$, и превратить его в группу, $G(X)$, используя перемножение формальных рядов. Тогда полный класс Чженя определяет групповой гомоморфизм

$$c\colon K(X) \to G(X).$$

Сигал показал в работе [128], что эта группа $G(X)$ является нулевым членом некоторой обобщенной теории когомологий. В действительности Сигалом получен более общий результат. Он рассматривает формальные ряды

$$1 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots,$$

где

$$x_i \in H^i(X; A_i),$$

но все же ограничивается обычными когомологиями.

Однако можно поставить аналогичную задачу в более общей ситуации. Предположим, что задана обобщенная теория когомологий k^*, в которой определены $\cup$-произведения. Такие произведения определены, например, в K-теории и в теории кобордизмов. Тогда можно образовать мультипликативную группу $G(X)$ сумм вида

$$1 + x, \quad x \in \tilde{k}^0(X).$$

Возникает вопрос: будет ли эта группа нулевым членом теории когомологий?

Например, стабильные когомотопические группы составляют обобщенную теорию когомологий с произведениями (соответствующую сферическому спектру $\Sigma^\infty S^0$); этой теории соответствует мультипликативная теория K_F.

В общем случае нет особых оснований надеяться на то, что группа $G(X)$ является нулевым членом теории когомологий. Напротив, Штейнер [143] показал, что уже комплексная K-теория с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ служит контрпримером к этой гипотезе. Поэтому $\cup$-умножение нужно предполагать достаточно хорошим. Например, возьмем в качестве k^* вещественную K-теорию KO. Тогда как множество $G(X)$ представляется подпространством

$$1 \times BO \subset \mathbb{Z} \times BO.$$

Однако, чтобы представить $G(X)$ как группу, приходится ввести в BO нестандартную H-структуру. А именно, структурное отображение

$$\mu: BO \times BO \to BO$$

нужно определить при помощь тензорного перемножения виртуальных расслоений виртуальной размерности 1. (Виртуальным расслоением называется формальная разность $\xi - \eta$ двух настоящих расслоений ξ, η.) Это H-пространство мы обозначим через $BO_\otimes$ и

аналогично определим $BU_{\otimes}$. Известно, что эти H-пространства $BO_{\otimes}$ и $BU_{\otimes}$ являются бесконечнократными пространствами петель [127]. Общий результат, охватывающий произвольные теории с достаточно хорошим умножением, приведен в [99].

Все рассмотрения, связанные с ($iiic$) (спектры алгебраической K-теории), откладываются до § 2.6 и 3.2.

Это, по существу, завершает введение. Цель теории бесконечнократных пространств петель - снабдить топологов необходимой им информацией о бесконечнократных пространствах петель, или, что то же самое, о спектрах, или, что то же самое, об обобщенных теориях когомологий, причем особое внимание уделяется тем бесконечнократным пространствам петель, которые возникают на практике и нужны в приложениях, особенно в приложениях к теории многообразий. Пять глав нам придется потратить на знакомство с основными средствами нашей теории, и только в короткой заключительной седьмой главе мы вернемся к ее предмету и расскажем о ее относительных достижениях.

Глава 2

МАШИНЕРИЯ

§2.1. Введение

Целью этой главы является более подробное обсуждение проекта, в общих чертах обрисованного в § 1.7: построить категорию пространств, снабженных дополнительной структурой, достаточно богатой для того, чтобы функтор Ω^{∞} устанавливал эквивалентность категории спектров с этой новой категорией структуризованных пространств. Для реализации этой программы необходимо изрядное количество определений, теорем и доказательств, которые потребуют известных интеллектуальных усилий и могут устрашить тех, кто впервые со всем этим сталкивается; впрочем, многие читатели, возможно, вспомнят, как они испытывали аналогичные чувства в отношении спектральных последовательностей, теории пучков или каких-нибудь других подобных вещей, которые в настоящее время являются их любимым инструментом; так что скажем еще спасибо, что мы не занимаемся алгебраической геометрией. Топологи обычно говорят об этом аппарате как о "машинерии".

В § 2.2 и 2.3 я попытаюсь обосновать целесообразность подхода, используемого нами в обращении с этими структуризованными пространствами, и это послужит достаточной мотивировкой наших определений. В § 2.3 я постепенно переключу внимание с определений на теоремы, а в § 2,4 мы обратимся к методам доказательств, но в § 2.5 и 2.6 нам придется вернуться к описанию машинерии. В § 2.7 я дополню замечания об "аддитивных структурах", сделанные в § 2.2 – 2.6, замечанием, что стоит рассматривать также "мультипликативные структуры".

§ 2.2. Пространства петель и A_∞-пространства в смысле Сташефа

В этом параграфе мы займемся вопросом о том, как специалисты по теории гомотопий могут определить, эквивалентно ли некоторое пространство X пространству петель ΩY.

Прежде всего такое пространство X должно быть H-пространством. Однако структура пространства петель богаче, чем просто H-структура. Это видно хотя бы из того, что пространство петель эквивалентно топологическому моноиду, или полугруппе, т.е. H-пространству, в котором умножение строго ассоциативно и единица является строгой единицей. Для доказательства этого факта мы воспользуемся агрегатом, носящим название петель Мура. Чтобы построить пространство $\Omega' Y$ петель Мура на Y, рассматривают отображения

$$\omega: [0, t], 0, t \to Y, y_0, y_0 \quad (t \geqslant 0).$$

Такое отображение называют петлей длины t. Разумеется, если $t = 0$, то отображение ω постоянно. Имеется очевидное вложение множества $\Omega' Y$ в пространство $\Omega Y \times [0, \infty)$, где $[0, \infty)$ – полупрямая $0 \leqslant t < \infty$, и мы наделяем $\Omega' Y$ индуцированной топологией. При этом ясно, что ΩY и $\Omega' Y$ гомотопически эквивалентны. Пространство $\Omega' Y$ обладает очевидным умножением, при котором произведение петель длин r и s есть петля длины $r + s$; по отношению к этому умножению $\Omega' Y$ является моноидом, эквивалентным ΩY как H-пространство.

Полученное необходимое условие, по существу, является достаточным: любой топологический моноид X, у которого $\pi_0(X)$ есть группа, эквивалентен пространству петель. Доказательства мы здесь не приводим, так как оно в настоящий момент не представляет для нас интереса.

С точки зрения гомотопического тополога рассмотрение умножения $\mu: X \times X \to X$, для которого отмеченная точка является строгой единицей, вполне осмысленно: любое умножение можно продеформировать в такое, воспользовавшись теоремой о продолжении гомотопии. Но к сожалению, условие строгой ассоциативности

$$(xy)z = x(yz)$$

покажется ему весьма неудобным. Он предпочел бы иметь дело с условием гомотопической ассоциативности

$$\mu(\mu \times 1) \simeq \mu(1 \times \mu),$$

но этого условия нам недостаточно, и вот почему.

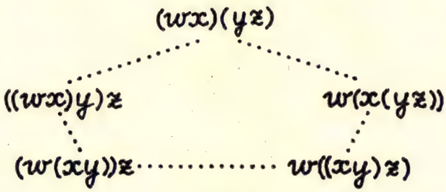
Предположим, что заданы пространство X, умножение $\mu: X^2 = X \times X \to X$ и такая гомотопия $h_t: X^3 \to X$, что

$$h_0 = \mu(\mu \times 1), \quad h_1 = \mu(1 \times \mu).$$

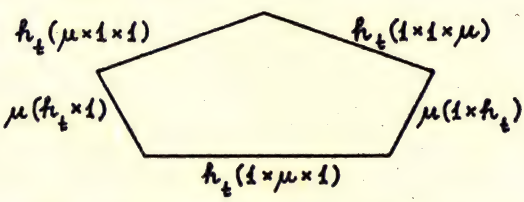
Обозначив $\mu(x, y)$ через xy, эти равенства можно переписать в виде

$$h_0(x, y, z) = (xy)z, \quad h_1(x, y, z) = x(yz).$$

Рассмотрим теперь отображения $X^4 \to X$. Операция умножения позволяет определить пять таких отображений: они переводят точку (w, x, y, z) в составные произведения, изображенные на следующей диаграмме:



Пунктирные линии на этой диаграмме представляют собой пять гомотопий, естественно возникающих между этими пятью отображениями:



Вместе эти пять гомотопий составляют отображение

$$S^1 \times X^4 \to X.$$

Можно спросить, продолжается ли это отображение, скажем, до отображения

$$H: E^2 \times X^4 \to X.$$

Оказывается, что иногда продолжается, а иногда – нет. Предположим, например, что X есть строгий топологический моноид и μ – умножение в нем; в этом случае можно положить $h_t(x,y,z) = xyz$ (независимо от t), и наше отображение H, очевидно, существует – можно положить

$$H(e, w, x, y, z) = wxyz$$

(независимо от $e \in E^2$). Но в общем случае такого H не существует.

Мы рассматриваем существование H как вторичное гомотопическое условие. Если отображение H существует, то можно аналогичным образом рассмотреть отображения $X^5 \to X$ и сформулировать третичное гомотопическое условие. И так далее.

Конечно, необходимо уточнить смысл слов "и так далее". В объяснении этого я буду в основном следовать работе Сташефа [139]. (Эта работа Сташефа удобна для моих целей, но из чувства исторической справедливости надо воздать должное более ранней работе Сугавары [144].)

(i) Сташеф построил последовательность K_m, $m \geq 2$, пространств параметров, где K_m есть клетка E^{m-2} с явно указанным подразделением границы; в частности, K_2 есть точка, K_3 – единичный отрезок I, а K_4 – диск E^2 с границей, подразделенной как пятиугольник.

(ii) Он, далее, определил A_n-пространство как пространство X с заданным семейством отображений

$$M_r: K_r \times X^r \to X,$$

$2 \leq r \leq n$, удовлетворяющих подходящим условиям. Например, A_2-пространство есть пространство X с отображением M_2 $X \times X \to X$, A_3-пространство есть пространство X с отображением $M_2: X \times X \to X$ и заданной гомотопией M_3 между $M_2(M_2 \times 1)$ и $M_2(1 \times M_2)$ и т.д.

(iii) Более точно определение дается индуктивно. Пусть X есть A_{n-1}-пространство, так что заданы отображения $M_2, M_3, \ldots, M_{n-1}$. Через эти отображения Сташеф определяет отображение $(\partial K_n) \times X^n \to X$. По определению X является <u>A_n-пространством</u>, если существует отображение

$$M_n: K_n \times X^n \to X,$$

продолжающее это отображение, заданное на $(\partial K_n) \times X^n$.

При $n \geq 4$ отображения M_n называются высшими гомотопиями.

(iv) Пространство X называется A_∞-пространством, если при всех $n \geq 2$ заданы отображения M_n, наделяющие X структурой A_n-пространства для каждого n.

(v) Понятие A_∞-пространства представляет собой адекватную (и подходящую для теории гомотопий) замену понятия пространства со строго ассоциативным умножением.

Строго говоря, я упростил изложение, сосредоточившись на условии ассоциативности и игнорируя тот факт, что отмеченная точка должна быть единицей; однако в определении A_n-пространства, фактически данном Сташефом, присутствует требование, чтобы отмеченная точка была единицей в некотором подходящем смысле.

Все это должно привести к следующему результату: пространство X тогда и только тогда эквивалентно пространству петель ΩY, когда X есть A_∞-пространство, а $\pi_0(X)$-группа. Эта теорема неявно содержится в [139], правда, там столь же неявно предполагается, что X связно; это замечание относится и к более ранним работам, используемым в [139], например к [54].

Опять-таки, строго говоря, нам требуется результат следующего вида: функтор Ω задает эквивалентность между категорией (связных пунктированных) клеточных пространств Y и подходящим образом определенной категорией пространств с A_∞-структурой.

Я намечу путь, следуя по которому можно доказывать такие теоремы. Из теории расслоений хорошо известно, что по любой топологической группе G можно построить "универсальное расслоение"

$$G \longrightarrow EG \longrightarrow BG$$

со слоем G, тотальным пространством EG и базой BG. В зависимости от ваших предположений и вашей конструкции пространство EG будет либо стягиваемо, либо по крайней мере слабо гомотопически эквивалентно точке. Здесь удобно ссылаться на [71], особенно с. 80 - 88. Хорошо известно также, что расслоение

$$G \longrightarrow EG \longrightarrow BG$$

очень напоминает описанное в гл. I расслоение

$$\Omega X \to EX \to X.$$

(Конечно, буква E в двух этих случаях обозначает разные вещи: в первом случае это есть функтор слоя G, а во втором другой функтор базы X; обычно контекст позволяет избежать путаницы.) Было бы желательно, чтобы функтор B ("классифицирующее пространство") был в каком-нибудь смысле обратен функтору Ω ("пространство петель"). Для этого необходимо, конечно, уметь определять классифицирующие пространства и универсальные расслоения для пространств G, не столь хороших, как топологические группы. В случае когда G есть моноид, это сделано в [103] и [142]; см. также более позднюю работу [94]. С течением времени ограничений на G становилось все меньше и меньше, хотя "универсальное расслоение" становилось расслоением во все более и более слабом смысле. В конце концов "универсальное расслоение" и "классифицирующее пространство" были определены для случая, когда G является лишь A_∞-пространством. Именно это и сделано в работах Сташефа и Сугавары.

Если G есть только A_n-пространство, то можно определить часть "классифицирующего пространства", что также представляет определенный интерес. Например, положив $G = S^1$ (с обычной структурой топологической группы) и рассматривая S^1 как A_n-пространство, мы получим на этом пути расслоение

$$S^1 \longrightarrow S^{2n-1} \xrightarrow{\pi} CP^{n-1}$$

и, используя π как приклеивающее отображение, получим

$$CP^{n-1} \cup_\pi e^{2n} = CP^n.$$

§ 2.3. N-кратные и бесконечнократные пространства петель; E_n- и E_∞-пространства

В этом параграфе мы рассмотрим естественное продолжение конструкций предыдущего параграфа, относящееся к итерированным пространствам петель $\Omega^n Y$ с $n \geq 2$.

После § 2.2 более или менее ясно, что, действуя в духе работы Сташефа, можно выписать условия, при которых H-пространство является двукратным пространством петель. Если $X \simeq \Omega^2 Y$,

то, конечно, умножение в X гомотопически коммутативно, т.е.

$$\mu \simeq \mu\tau : X^2 \to X, \text{ где } \tau(x,y) = (y,x).$$

Однако, этого условия самого по себе, конечно, недостаточно; мы хотим получить бесконечное семейство высших гомотопий, аналогичное семейству отображений M_n, построенному Сташефом. Предполагая, что $X \simeq \Omega^3 Y$ или $X \simeq \Omega^4 Y$, мы приходим к новым семействам высших гомотопий. Более того, эти высшие гомотопии осмысленны и полезны, ибо некоторые из них появляются при построении гомологических операций в $H_*(\Omega^n Y; \mathbb{Z}/p)$ по Кудо и Араки [77, 78], Браудеру [47] и Дайеру и Лашофу [55], а эти гомологические операции, несомненно, доставляют разумную информацию, отражающую существенные свойства n-кратной петлевой структуры.

Мы сталкиваемся, однако, с той трудностью, что для явного описания пространств K_n надо проделать много неприятной работы; поэтому для дальнейшего продвижения хорошо бы научиться обходиться без этого явного описания, заменив его некоторой "машиной", которая строила бы их для нас, подобно тому, как метод ацикличных моделей в обычных гомологиях позволяет нам обходиться без выписывания явных формул для $\cup_i$-умножений. Все "машины" этой главы представляют собой приспособления для автоматического построения бесконечного количества высших гомотопий, и в этом их основное назначение независимо от того, скрывают они это за своей благопристойной внешностью или нет.

К сожалению, как я уже отмечал в § 2.1, построение и использование этих "машин" – трудоемкое дело. По этой причине настоящая глава написана скорее как очерк о пользе "машин": она не рассчитана на то, что по ее прочтении читатель получит удостоверение "механика". Однако я надеюсь, что она может создать у большинства читателей общее представление о том, что происходит, а также послужит предпосылкой для изучения более технических работ, на которые я буду ссылаться.

Прежде всего мы нуждаемся в создании экологической ниши для расселения (a) полиэдров K_n Сташефа и (b) некоторых других аналогично устроенных полиэдров. Я начну с определения топологического ПРОПа, или категории операторов в смысле Бордмана и Фогта [39, 40]; это понятие напоминает понятие операды в смысле Мэя [92], и позже я скажу, в чем состоит разница между ними.

<u>Топологический ПРОП</u> $\mathcal{P}$ состоит из пространств $P_{a,b}$, индексированных парами целых чисел $a, b \geq 0$. <u>Действием</u> ПРОПа

на пространстве X мы назовем семейство отображений

$$P_{a,b}\times X^{b}\to X^{a},$$

так что пространства $P_{a,b}$ можно рассматривать как "пространства параметров", аналогичные полиэдрам K_n Сташефа, которые представляют собой пространства параметров $P_{1,n}$, поскольку они параметризуют отображения $X^n\to X$.

Например, Кудо и Араки [77, 78] работали с пространствами X, наделенными структурными отображениями $\theta_m\colon I^m\times X\times X\to X$, так что у них использовались пространства параметров $P_{1,2}=I^m$. Далее, Дайер и Лашоф [55] работали с пространствами X, наделенными структурными отображениями $(\mathcal{J}^n\Sigma_p)\times X^p\to X$, где Σ_p есть симметрическая группа степени p и $\mathcal{J}^n\Sigma_p$ есть n-кратный джойн $\Sigma_p*\ldots*\Sigma_p$, так что они пользовались пространствами параметров $P_{1,p}=\mathcal{J}^n\Sigma_p$.

Возвращаясь к нашей теории, рассмотрим пространство X; если оно локально компактно или если мы используем компактно порожденные топологии, то можно построить пространство

$$H_{a,b}=(X^{a})^{(X^{b})},$$

и возникает отображение

$$H_{a,b}\times X^{b}\to X^{a};$$

значит, действие ПРОПа $\mathcal{P}$ на X есть семейство непрерывных отображений

$$P_{a,b}\to H_{a,b},$$

согласованных со всеми рассматриваемыми структурами.

А что это за структуры? Мы еще не сказали, какими структурами обладает $\mathcal{P}$. Во-первых, множества $H_{a,b}$ образуют категорию: мы можем взять композицию отображений

$$h'\colon X^{a}\leftarrow X^{b}\quad \text{и}\quad h''\colon X^{b}\leftarrow X^{c}$$

и получить отображение

$$h'h''\colon X^{a}\leftarrow X^{c}.$$

В соответствии с этим мы потребуем, чтобы множества $P_{a,b}$ были множествами морфизмов некоторой категории; объектами этой категории будут символы X^{a}, $a=0,1,2,3,\ldots$, или просто целые чис-

ла $a = 0, 1, 2, 3, \ldots$, и множества $P_{a,b}$ будут множествами морфизмов объекта b в объект a. Мы потребуем также, чтобы наша категория была топологической, т.е. чтобы отображения

$$P_{a,b} \times P_{b,c} \to P_{a,c}$$

были непрерывными.

Во-вторых, по отображениям

$$f: X^a \leftarrow X^b \quad \text{и} \quad g: X^c \leftarrow X^d$$

строится отображение

$$f \times g: X^{a+c} \leftarrow X^{b+d}$$

Поэтому мы потребуем, чтобы были заданы отображения (умножения)

$$P_{a,b} \times P_{c,d} \to P_{a+c,\, b+d}$$

со следующими свойствами.

(i) Все эти отображения непрерывны.

(ii) Для них имеет место строгая ассоциативность.

(iii) Тождественное отображение в пространстве $P_{0,0}$ является строгой единицей.

(iv) Обозначим через 1_a тождественное отображение в пространстве $P_{a,a}$. Тогда

$$1_a \times 1_b = 1_{a+b}.$$

(v) $(f \times g)(h \times k) = (fh \times gk)$, если обе части равенства имеют смысл.

Так как умножение $\times$ есть функтор двух переменных, являющийся на объектах обычным сложением целых чисел, то мы имеем дело с <u>категорией с произведениями</u>.

В-третьих, на пространстве X^a действует симметрическая группа Σ_a. В действительности она действует на нем справа: задав вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_a) \in X^a$ как отображение

$$X \xleftarrow{x} \{1, 2, \ldots, a\}$$

и перестановку как отображение

$$\{1, 2, \ldots, a\} \xleftarrow{\rho} \{1, 2, \ldots, a\},$$

мы видим, что композицию следует брать в таком порядке:

$$X \xleftarrow{x} \{1, 2, \ldots, a\} \xleftarrow{\rho} \{1, 2, \ldots, a\};$$

можно увидеть, что ρ действует на x справа, и просто внимательно посмотрев на формулу

$$(x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}, \ldots, x_{\rho(a)}).$$

Таким образом, отображение

$$\rho \mapsto \rho^*: \Sigma_a \to H_{a,a}$$

является антигомоморфизмом (моноида в моноид). В соответствии с этим мы потребуем, чтобы для каждого a был задан антигомоморфизм

$$\rho \mapsto \rho^*: \Sigma_a \to P_{a,a}$$

одного моноида в другой. Эта структура должна быть связана с умножением $\times$ следующим образом:

(i) Если $\rho \in \Sigma_a$ и $\sigma \in \Sigma_b$, то

$$\rho^* \times \sigma^* = (\rho \times \sigma)^*,$$

где $\rho \times \sigma \in \Sigma_{a+b}$ есть очевидная перестановка, такая, что эта формула справедлива в $H_{a+b,a+b}$ для любого X.

(ii) Если $f \in P_{a,b}$ и $g \in P_{c,d}$, то

$$\rho^*(f \times g) = (g \times f)\sigma^*,$$

где ρ есть перестановка, очевидным образом возникающая при отображении $X^a \times X^c \to X^c \times X^a$, переставляющем сомножители X^a и X^c, а σ – аналогичная перестановка, возникающая при отображении $X^b \times X^d \to X^d \times X^b$.

Некоторые авторы предпочитают использовать гомоморфизм

$$\Sigma_a \to P_{a,a},$$

действующий по формуле

$$\rho \mapsto (\rho^{-1})^*: \Sigma_a \to H_{a,a};$$

различие между двумя подходами несущественно.

В некоторых случаях работа с ПРОПами не требует использования перестановок, и потому отображения $\Sigma_a \to P_{a,a}$ не обязательно включать в структуру ПРОПа; таким образом, имеется два

варианта определения ПРОПа: один - "с перестановками", а другой - "без перестановок". Согласно Маклейну [83], с. 97, термин ПРОП происходит от "категории с ПРОизведениями и Перестановками", поэтому ПРОП без перестановок должен был бы называться ПРО.

Понятие операды, введенное Мэем [92], аналогично описанному выше понятию ПРОПа, за исключением того, что рассматриваются лишь пространства параметров $P_{1,\alpha}$; поэтому в операде операции "композиции" и "декартова умножения" не существуют сами по себе: из них лишь можно скомбинировать операцию

$$f(g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_\alpha),$$

где $f \in P_{1,\alpha}$, $g_i \in P_{1,b_i}$. Разумеется, у Мэя есть список аксиом для этой единственной операции.

В действительности из сказанного видно, что операды во многих отношениях лучше, чем ПРОПы; например, последовательность пространств Сташефа K_n является операдой (без перестановок), но не является ПРОПом. Просто мне представляется более удобным сначала объяснить "композицию" и "декартово умножение" по отдельности и лишь потом описывать комбинированную операцию

$$f(g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_\alpha).$$

На самом деле разница между ПРОПами и операдами не так уж и страшна для нас. По данному ПРОПу можно построить операду, оставив пространства $P_{1,b}$ и отбросив пространства $P_{\alpha,b}$ с $\alpha > 1$. По данной операде можно построить ПРОП, "свободно порожденный" данной операдой; это означает, что, работая без перестановок, мы положим

$$P_{\alpha,b} = \bigcup_{b_1+b_2+\ldots+b_\alpha=b} P_{1,b_1} \times P_{1,b_2} \times \ldots \times P_{1,b_\alpha},$$

а при работе с перестановками надо заменить пространство

$$P_{1,b_1} \times P_{1,b_2} \times \ldots \times P_{1,b_\alpha}$$

пространством

$$P_{1,b_1} \times P_{1,b_2} \times \ldots \times P_{1,b_\alpha} \times_G \Sigma_b,$$

где

$$G = \Sigma_{b_1} \times \Sigma_{b_2} \times \ldots \times \Sigma_{b_\alpha}.$$

Если мы перейдем от ПРОПа к операде, а от операды снова к ПРОПу описанными выше способами, то мы получим, вообще говоря, ПРОП, отличный от исходного; таким образом, ПРОПов больше,

чем операд. Для наших целей, однако, хватит тех ПРОПов, которые эквивалентны операдам.

Необходимо также отметить, что в определение действия ПРОПа или операды на пространстве X необходимо включить условия, касающиеся поведения отмеченной точки.

Моя следующая задача - убедить вас в том, что можно (и без большого труда) построить несколько операд, которые способны действовать на некоторых важных пространствах. Я сделаю это, предъявив "операду n-мерных кубиков". Эта операда действует на любом n-кратном пространстве петель, так что мы рассмотрим случай, когда $X = \Omega^n Y$. В этом случае

$$\prod_1^b X = (Y, y_0)^{(\bigvee_1^b S^n, s_0)}.$$

Мы построим пространство $P_{1,b}$, точками которого являются некоторые непрерывные отображения

$$S^n, s_0 \to \bigvee_1^b S^n, s_0.$$

Поскольку любое отображение

$$p: S^n, s_0 \to \bigvee_1^b S^n, s_0$$

индуцирует отображение

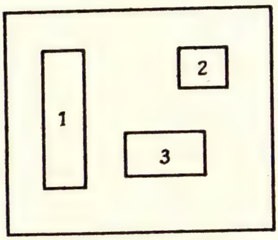
$$p^*: X \leftarrow X^b,$$

наша операда автоматически будет действовать на $X = \Omega^n Y$. Используемые нами отображения

$$p: S^n \to \bigvee_1^b S^n$$

выглядят следующим образом.

Отождествим сферу S^n с $I^n/\partial I^n$. Наши отображения p пространства $I^n/\partial I^n$ постоянны (и их значение - отмеченная точка)



вне множества, являющегося объединением b неперекрывающихся прямоугольных параллелепипедов, ребра которых параллельны осям координат (см. рисунок). На каждом из этих параллелепипедов p есть линейное отображение $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\lambda_1+\mu_1 x_1, \lambda_2+\mu_2 x_2, \dots, \lambda_n+\mu_n x_n)$ на одно из слагаемых $S^n = I^n/\partial I^n$ букета $\bigvee_1^b S^n$. Каждое из b слагаемых букета используется один и только один раз; это означает, что оно является образом ровно одного из выбранных параллелепипедов в $I^n/\partial I^n$.

На рисунке изображена ситуация для $n = 2$, $b = 3$; предполагается, что параллелепипед со значком "I" отображается на слагаемое номер I букета $\bigvee_1^3 S^2$, и аналогично обстоит дело с параллелепипедами со значками "2", "3".

Пространство $P_{1,b}$ наделяется топологией как подпространство функционального пространства

$$(\bigvee_1^b S^n, s_0)^{(S^n, s_0)};$$

эквивалентным образом, можно сказать, что мы считаем отображения близкими, если близки вершины соответствующих параллелепипедов.

Эта нехитрая операда $\mathcal{P} = \mathcal{P}(n)$ называется <u>операдой n-мерных кубиков</u> (или <u>ПРОПом n-мерных кубиков</u>, если мы перейдем к ПРОПу). Идея ее построения принадлежит Бордману и Фогту [39]. Сразу видно, что эта операда вполне отвечает нашему геометрическому замыслу. Заметим еще, что действие симметрической группы Σ_b на $P_{1,b}$ свободно.

Мы будем говорить, что пространство X является <u>E_n-пространством</u>, если на нем задано действие операды n-мерных кубиков, или, менее жестко, действие другой операды, эквивалентной этой и приспособленной для тех технических целей, которые мы преследуем в тот или иной момент.

Теперь уже можно формулировать соответствующие результаты. Грубо говоря, первый из них показывает, что пространство X является n-кратным пространством петель тогда и только тогда, когда оно является E_n-пространством; однако нам потребуется более точная формулировка.

ПРЕДТЕОРЕМА 2.3.I. (i) <u>Функтор Ω^n можно превратить в функтор, определенный на категории пространств Y и принимающий значения в категории таких E_n-пространств X, что $\pi_0(X)$ является группой.</u>

(ii) Имеется "обратный к Ω^n" функтор B^n, ставящий в соответствие E_n-пространству X $(n-1)$-связное пространство Y.

(iii) Имеется естественное преобразование

$$B^n \Omega^n Y \to Y,$$

которое является эквивалентностью, если Y $(n-1)$-связно.

(iv) Имеется естественное преобразование

$$X \to \Omega^n B^n X,$$

которое является эквивалентностью, если $\pi_0(X)$ есть группа.

Если не предполагать, что $\pi_0(X)$ есть группа, то связь между X и $\Omega^n B^n X$ делается сложнее, и ее описание мы приведем в § 3.2. По существу, для этого достаточно рассмотреть случай $n = 1$.

Я должен объяснить слово "предтеорема", а то читатель может подумать, что оно служит указанием на какие-то дефекты в доказательстве; но я имею в виду другое. Это слово указывает на несовершенство не доказательств, принадлежащих другим, а формулировки, принадлежащей мне. Слово "предтеорема" у меня означает, что речь идет об утверждении, достаточном (как я надеюсь) для объяснения общего содержания и цели результата, но не отягощенном различными техническими деталями, которые обязательно должны присутствовать, если вы хотите, чтобы утверждение стало теоремой. Слово "предтеорема" должно, как правило, стимулировать обращение читателя к первоначальным работам. Оно показывает также, что существует хотя бы один набор технических деталей, добавление которых превращает предтеорему в теорему, но обычно оно означает, что литература предлагает на выбор несколько таких теорем. В этом случае вы можете ознакомиться с предложением и посмотреть, какой из соревнующихся между собой авторов предлагает технические детали, более удобные для ваших целей. Или, если вы не можете максимизировать удобства, попытайтесь хотя бы минимизировать неудобства.

В случае предтеоремы 2.3.1 точные теоремы такого сорта можно найти в [38], с. 57, и в [92], с.273, 369. Обсуждение методов доказательств таких теорем мы отложим до следующего параграфа.

Теперь мы хотим перейти к пределу при $n \to \infty$. Очевидно, что можно вложить операду $\mathcal{P}(n)$ n-мерных кубиков в операду $\mathcal{P}(n+1)$ $(n+1)$-мерных кубиков: отображению $S^n \to \bigvee_i S^n$ мы ставим в соответствие его произведение с отображением, тождественным по

координате x_{n+1}. Определим операду кубиков $\mathcal{P}(\infty)$ как $\bigcup_n \mathcal{P}(n)$, т.е. как объединение всех операд n-мерных кубиков. Можно так модифицировать функтор Ω^∞ из категории спектров в категорию пространств, что операда $\mathcal{P}(\infty)$ будет действовать на любом пространстве вида $\Omega^\infty Y$; это фактически та же модификация, после которой в спектре возникал гомеоморфизм

$$X_n \cong \Omega X_{n+1}$$

(см. § 1.4); за деталями читатель отсылается к работе Мэя [89]. Мы можем сказать теперь, что пространство X является E_∞-пространством, если на нем задано действие операды $\mathcal{P}(\infty)$, или, менее жестко, действие другой операды, эквивалентной этой и приспособленной для наших технических целей.

Главное хорошее свойство этой операды $\mathcal{P}(\infty)$ состоит в следующем. Поскольку в операде $\mathcal{P}(n)$ n-мерных кубиков каждое пространство $P_{1,b}(n)$ $(n-2)$-связно, в операде $\mathcal{P}(\infty)$ каждое пространство $P_{1,b}(\infty)$ стягиваемо.

Бордман и Фогт назвали X E-пространством, если на X имеется действие такого ПРОПа $\mathcal{P}$ (с перестановками), что пространства $P_{1,b}$ стягиваемы для всех b. Это понятие, по существу, совпадает с нашим понятием E_∞-пространства. Дело в том, что стягиваемость пространств $P_{1,b}$ гарантирует существование всех необходимых нам высших гомотопий. Например, в $P_{1,2}$ есть точка μ, которая выступает как умножение в X и превращает X в H-пространство. Пусть τ – нетривиальный элемент группы Σ_2, действующий на X^2 обычной перестановкой: $\tau(x,y)=(y,x)$. Тогда точки μ и $\mu\tau$ из $P_{1,2}$ можно соединить путем, и, значит, X есть гомотопически коммутативное H-пространство. Далее, точки $\mu(\mu\times 1)$ и $\mu(1\times\mu)$ в $P_{1,3}$ можно соединить путем, и, значит, X есть гомотопически ассоциативное H-пространство. Точно так же устанавливается, что X есть A_∞-пространство, и так далее. Для фиксированного n некоторые из этих построений можно провести в рамках операды $\mathcal{P}(n)$ n-мерных кубиков, а некоторые – нельзя. Первоначально Бордман и Фогт использовали для E-пространств термин "гомотопически какие-угодно H-пространства" (homotopy everything H-spaces), однако впоследствии они отказались от него по причинам, на которых мы не будем останавливаться.

Следующее утверждение аналогично предтеореме 2.3.1. Грубо говоря, оно показывает, что пространство X является бесконечнократным пространством петель тогда и только тогда, когда оно

является E_∞-пространством, но нам нужна более точная формулировка.

ПРЕДТЕОРЕМА 2.3.2. (i) Функтор Ω^∞ можно превратить в функтор, определенный на категории спектров Y и принимающий значения в категории таких E_∞-пространств X, что $\pi_0(X)$ является группой.

(ii) Имеется "обратный к Ω^∞" функтор B^∞ из категории E_∞-пространств в категорию связных спектров.

(iii) Имеется естественное преобразование

$$B^\infty\Omega^\infty Y \to Y,$$

которое является эквивалентностью, если спектр Y связен.

(iv) Имеется естественное преобразование

$$X \to \Omega^\infty B^\infty X,$$

которое является эквивалентностью, если $\pi_0(X)$ есть группа.

Если не предполагать, что $\pi_0(X)$ есть группа, то связь между X и $\Omega^\infty B^\infty X$ сложнее, см. § 3.2. Соответствующие точные теоремы можно найти в [16, 39, 40, 92, 93, 127].

Обсуждение методов доказательств таких теорем мы снова отложим до следующего параграфа.

Легко объяснить, в какой мере предтеоремы 2.3.1 и 2.3.2 опускают необходимые детали. Например, часть (i) предтеоремы 2.3.1 утверждает, что Ω^n можно сделать функтором, но для этого необходимо, чтобы E_n-пространства образовывали категорию. Какие в этой категории морфизмы? Я ничего не сказал об этом. Какие отображения должны быть морфизмами? Один кандидат на их определение очевиден. Если на пространствах X и Y действует некоторая операда $\mathcal{P}$, мы можем рассмотреть отображения $f\colon X\to Y$, коммутирующие (строго) со всеми структурными отображениями; иными словами, мы требуем (строгой) коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p} & X^k \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^k} \\ Y & \xleftarrow{p} & Y^k \end{array}$$

для всех $p \in P_{1,k}$. Достоинством этого определения является его простота; оно указывает наилегчайший способ полного уточнения нашего утверждения, и оно достаточно для интересующих нас сейчас приложений. Однако это определение не является единствен-

но возможным. Например, определяя понятие морфизма одного H-пространства в другое, мы требовали, чтобы диаграммы

$$\begin{tikzcd} X & X^2 \arrow[l, "\mu"'] \\ Y \arrow[from=1-1, "f"'] & Y^2 \arrow[l, "\mu"] \arrow[from=1-2, "f^2"] \end{tikzcd}$$

были коммутативны лишь с точностью до гомотопии, а не строго. Отправляясь от этого примера, можно дать и другие определения, которые имеют то достоинство, что они гомотопически инвариантны, и тот недостаток, что они очень сложны. Этот подход отражен в [40] и [53], часть V.

Теперь я должен сказать, что результаты, подобные предтеоремам 2.3.1 и 2.3.2, не исчерпывают нашей теории. Конечно, с них было необходимо начать ввиду их важности для нашей темы; по словам Мэя, они представляют собой принц п распознавания, позволяющий узнать, является ли данное пространство n-кратным или бесконечнократным пространством петель. Но содержание теории этим не исчерпывается.

Прежде всего вспомним, что, как говорилось в гл. I, Джеймс [73] построил для ΩS^n "модель", позволяющую лучше понять структуру этого пространства. На самом деле он предложил модель для $\Omega \Sigma X$, где X – произвольное связное пространство, и эта модель позволяет мгновенно вычислить $H_*(\Omega(S^{n_1} \vee \ldots \vee S^{n_k}))$, о чем мы упоминали в гл. I. Позже Милгрэм [102] в том же ключе построил модель для $\Omega^n \Sigma^n X$. Наша теория должна доставлять и доставляет такие модели для $\Omega^n \Sigma^n X$ и $\Omega^\infty \Sigma^\infty X$, см. [92]. Мэй называет это аппроксимационными теоремами. Наша теория также должна объяснить и объясняет, в каком смысле пространства $\Omega^n \Sigma^n X$ и $\Omega^\infty \Sigma^\infty X$ (или их модели) являются свободными объектами категории E_n-пространств и E_∞-пространств. При этом доказательства "аппроксимационных теорем" и "принципа распознавания" должны поддерживать друг друга.

Польза от информации о таких пространствах, как $\Omega^n \Sigma^n X$, очевидна. Например, Снэйт [133] обнаружил некоторое стабильное расщепление пространства $\Omega^n \Sigma^n X$, и при помощи этого расщепления Маховолд построил новое интересное семейство элементов в 2-компонентах стабильных гомотопических групп сфер. Вызванный

этим интерес к теореме Снэйта привел к тому, что Коэн и Тейлор дали новое ее доказательство, а Мэй ее обобщил, но я пока не могу привести соответствующие ссылки [1].

Все же с точки зрения тополога с алгебраическими вкусами "E_n-структура" и " E_∞ -структура" являются довольно рыхлыми семействами высших гомотопий; возникает желание выжать из них воду и посмотреть, какие инварианты в них действительно содержатся. Инварианты, конечно, есть, и их немало; переход от описанной геометрии к хорошо выбранным инвариантам, с помощью которых можно затем проводить вычисления, тоже является задачей нашей теории. По этому поводу см. [90, 91, 152]. Но в заключение стоит напомнить, что любая теория должна находить свое оправдание в приложениях к конкретным задачам и интересным частным случаям.

§ 2.4. Методы

В этом параграфе я кое-что скажу о методах, которыми доказываются утверждения, подобные результатам § 2.3. Я по-прежнему буду опускать детали, но постараюсь разъяснить несколько идей, которые помогут читателю понять суть дела.

Общий вид формулировок предтеорем 2.3.1 и 2.3.2 подсказывает, что прежде всего надо ввести функторы B^n и B^∞. После этого надо установить их свойства. Есть два основных подхода к определению функторов B^n и B^∞. Бордман и Фогт в [40] строят одношаговый функтор B, а затем его итерируют; Мэй в [92] строит функтор B^n одним ударом.

Несколько точнее, Бордман и Фогт предполагают, что дано E_∞-пространство X. Затем они заменяют его эквивалентным моноидом $Y = MX$. Как я объясню ниже, Бордман и Фогт используют лишь гомотопически инвариантные структуры, и потому на Y имеется столько же структур, сколько на X. Потом они берут классифицирующее пространство BY. После этого они строят E_∞-структуру на BY; так как BY строится из пространств $Y, Y^2, Y^3, \ldots$ и некоторых не зависящих от Y вспомогательных пространств (вроде клеток), то более или менее правдоподобно, что бесконечное количество данных типа отображений $Y^b \to Y^a$ для различных значений a и b и гомотопий между ними можно собрать в одно

---

1) См. по этому поводу [161*], [162*]. - Прим.перев.

структурное отображение для BY. Поскольку BY есть E_∞-пространство, конструкцию можно итерировать.

О предложенной Мэем конструкции функтора B^n я скажу позже.

Заметное различие технических средств этих авторов, возможно, связано с различием точек зрения и методологических принципов. Я могу сказать, что мои симпатии лежат на обеих сторонах. По-видимому, Бордман и Фогт исходят из того, что должна существовать теория гомотопически инвариантных структур и что кто-то должен построить такую теорию хотя бы ради нее самой. Ведь теория H-пространств устроена так, что если X есть H-пространство, то и всякое пространство Y, гомотопически эквивалентное X, является H-пространством. Поэтому и теория A_n-пространств или E_∞-пространств должна обладать тем свойством, что если пространство X обладает A_n- или E_∞-структурой и если $f: X \to Y$ - гомотопическая эквивалентность, то Y можно, по существу, единственным способом снабдить A_n- или E_∞-структурой так, чтобы f стало эквивалентностью A_n- или E_∞-пространств.

Для реализации этой программы Бордману и Фогту показалось разумным воспользоваться ПРОПами, которые в некотором смысле являются свободными (уточнением этого смысла мы здесь заниматься не будем). Бордман и Фогт и построили ПРОПы, свободные в этом смысле. При этом они использовали комбинаторную машинерию (деревья) [37, 38]. По сути дела эта машинерия соответствует "грамматике" для "слов" из букв $M_2: K_2 \times X^2 \to X$, $M_3: K_3 \times X^3 \to X$ и других аналогичных букв для аналогичных операций. Именно эта комбинаторная техника придала работе Бордмана и Фогта ее неповторимую изысканность.

Напротив, Мэй, как кажется, видит назначение теории в том, чтобы как можно скорее доказать необходимые теоремы и затем всецело углубиться в наше настоящее дело, которое мы так любим, т.е. вычислять разные вещи, действительно имеющие инвариантный смысл, как, скажем, гомологические операции. Действуя в этом ключе, Мэй умело использует следующий трюк. Чтобы сравнить X и Y, не обязательно пытаться строить отображение $f: X \to Y$ или $g: Y \to X$; вместо этого можно построить новый объект Z, отображающийся как в X, так и в Y.

Предложенная Мэем конструкция функтора B^n есть вариант бар-конструкции. Напомню, что первоначальная бар-конструкция была придумана Эйленбергом и Маклейном [57] и использовалась для вычисления гомологий классифицирующих пространств; я объясню, в

7-2

чем состоит идея ее обобщения. Для получения обобщенной бар-конструкции необходим некоторый особенный функтор $T\colon C \to C$ из категории C в себя. Разъясним это на примерах.

ПРИМЕР 2.4.1. Пусть дана алгебра A над некоторым кольцом R. Если мы хотим применить к A обычную бар-конструкцию, то мы рассматриваем категорию C модулей над R и принимаем за T функтор

$$T(M) = A \otimes_R M.$$

Этот пример подсказывает аксиомы, которым должен удовлетворять функтор T. Во-первых, мы предполагаем, что задано естественное преобразование

$$\mu\colon T^2 \to T,$$

которое в нашем примере представляет собой отображение

$$A \otimes_R (A \otimes_R M) \to A \otimes_R M,$$

индуцированное умножением

$$A \otimes_R A \to A.$$

Во-вторых, мы предполагаем заданным естественное преобразование

$$\eta\colon 1 \to T,$$

которое в нашем примере представляет собой отображение

$$M = R \otimes_R M \to A \otimes_R M,$$

индуцированное единицей

$$R \to A.$$

Кроме того, эти отображения μ, η должны включаться в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} T^3M \arrow[r, "T\mu_M"] \arrow[d, "\mu_{TM}"'] & T^2M \arrow[d, "\mu_M"] \\ T^2M \arrow[r, "\mu_M"] & TM \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\eta_{TM}"] \arrow[dr, "1"'] & T^2M \arrow[d, "\mu_M"] & TM \arrow[l, "T\eta_M"'] \arrow[dl, "1"] \\ & TM & \end{tikzcd}$$

Такой функтор T вместе с преобразованиями μ и η играет в гомологической алгебре роль алгебры; я предпочел бы называть такие функторы функторами-алгебрами, хотя в теории категорий уже

дали им название: их называют <u>монадами</u> (или <u>тройками</u>); см. [84], с. 133.

ПРИМЕР 2.4.2. Пусть C – категория компактно порожденных пунктированных пространств, и пусть TX есть $\Omega^n\Sigma^n X$. Очевидно, имеется естественное преобразование

$$\eta : X \to \Omega^n\Sigma^n X$$

(сопряженное с $1 : \Sigma^n X \to \Sigma^n X$), а также преобразование $\Sigma^n\Omega^n Y \to Y$, с помощью которого можно определить преобразование

$$\mu : \Omega^n\Sigma^n\Omega^n\Sigma^n X \to \Omega^n\Sigma^n X.$$

Изучение этого примера, принадлежащего Беку [28], послужило, по словам Мэя, стимулом к развитию его идеи.

ПРИМЕР 2.4.3. Вообще, если имеется пара сопряженных функторов, мы можем построить монаду так же, как в примере 2.4.2 мы построили ее для частного случая функторов Ω^n и Σ^n.

Вернемся к примеру 2.4.1, в котором C есть категория R-модулей и $T(M) = A\otimes_R M$. Что такое A-модуль? Это – объект M категории C, снабженный некоторым отображением

$$\nu : A\otimes_R M \to M.$$

Это определение можно обобщить. Для данной категории C и данной монады $T : C \to C$ назовем <u>T-объектом</u> объект M категории C, для которого задано такое отображение

$$\nu : TM \to M,$$

что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} T^2M \arrow[r, "T\nu"] \arrow[d, "\mu_M"'] & TM \arrow[d, "\nu"] \\ TM \arrow[r, "\nu"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\nu"] & M \\ M \arrow[u, "\eta_M"] \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}$$

Специалист по теории категорий предпочел бы называть T-объекты T-алгебрами, однако с точки зрения важных для нас аналогий более подходящим кажется термин "T-модули".

ПРИМЕР 2.4.4. Пусть C – категория компактно порожденных пунктированных пространств, и пусть $TX = \Omega^n\Sigma^n X$, как в примере 2.4.2; тогда любой объект вида $\Omega^n Y$ является T-объектом.

Вернемся снова к примеру 2.4.1. Классическая бар-конструкция может быть использована для вычисления $\mathrm{Tor}_A(L, M)$. Мы уже нашли нишу для алгебры A и нишу для модуля M и готовы теперь к построению аналога $A \otimes_R A \otimes \ldots \otimes_R A \otimes_R M$, но у нас еще нет ниши для L, и мы еще не можем построить $L \otimes_R A \otimes \ldots \otimes_R A \otimes_R M$. Очевидно, мы должны ввести в действие еще один функтор из C в C, который играл бы роль функтора $S(N) = L \otimes_R N$.

В нашей общей ситуации мы будем предполагать, что нам дан произвольный функтор

$$S: C \to C'$$

(он может принимать значения в новой категории C'). Предположим также, что задано естественное преобразование

$$\lambda: ST \to S;$$

в нашем примере это отображение

$$L \otimes_R A \otimes_R N \to L \otimes_R N,$$

индуцированное действием

$$L \otimes_R A \to L.$$

При этом S и λ должны удовлетворять очевидным аксиомам, выражаемым коммутативностью диаграмм

$$\begin{tikzcd} ST^2N \arrow[r, "S\mu_N"] \arrow[d, "\lambda_{TN}"'] & STN \arrow[d, "\lambda_N"] \\ STN \arrow[r, "\lambda_N"] & SN \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} STN \arrow[r, "\lambda_N"] & SN \\ SN \arrow[u, "S\eta_N"] \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}$$

Такой функтор S можно назвать (<u>правым</u>) <u>T-функтором</u> (или <u>правым функтором-модулем над функтором-алгеброй</u> T).

ПРИМЕР 2.4.5. Функтор Σ^n является правым модулем над функтором-алгеброй $\Omega^n\Sigma^n$.

В этот момент перед читателем открывается заманчивая перспектива. Можно дать определение левого функтора-модуля над функтором-алгеброй T; тогда Ω^n будет левым функтором-модулем над $\Omega^n\Sigma^n$ и T-объект будет не чем иным, как левым функтором-модулем из однообъектной категории в категорию C. После этого мы можем довести нашу категорную теорию до полного логического совершенства: мы не только обходимся без элементов внутри наших объектов, но можем даже избежать упоминания объектов внутри наших категорий; все вокруг нас станет функторами.

Будьте покойны: такую блестящую возможность специалисты по категориям никогда не упустят.

Вернемся к работе Мэя. Его основное наблюдение состоит в следующем. Пусть C – категория компактно порожденных пунктированных пространств, и пусть $\{P_{1,n}\}$ – некоторая операда. Можно превратить операду $\{P_{1,n}\}$ в монаду, т.е. в функтор $P: C \to C$ с описанными выше свойствами, таким образом, что задание действия операды $\{P_{1,n}\}$ на пространстве X будет в точности эквивалентно заданию структурного отображения $PX \to X$, превращающего X в P-объект. Схема построения очевидна: чтобы построить PX, нужно начать с суммы

$$\coprod_n P_{1,n} \times X^n$$

и наложить подходящее отношение эквивалентности, см. [92], с. 279.

Идея заключается в том, что монада P может служить адекватной "ручной" заменой "дикой" монады $\Omega^n\Sigma^n$. Я говорю "ручной", потому что монада P всецело находится под нашим контролем.

ТЕОРЕМА 2.4.6. <u>Для подходящей операды $\{P_{1,k}\}$, эквивалентной операде n-мерных кубиков, и связного пространства X пространство PX слабо гомотопически эквивалентно $\Omega^n\Sigma^n X$.</u>

См. [92], с. 281, 309. Это и есть аппроксимационная теорема, о которой я говорил в конце § 2.3. Можно сказать, что PX выступает как "модель" для $\Omega^n\Sigma^n X$.

Для того чтобы двигаться дальше в понимании бар-конструкции, мы должны поговорить о симплициальных методах. Пусть σ^n – стандартный n-мерный симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданный уравнением $x_0+x_1+\dots+x_n=1$ и неравенствами $x_i \geqslant 0$, $i=0,1,\dots,n$. Вершина v_i этого симплекса есть точка $x_i=1$, $x_j=0$ при $j \neq i$. Мы определим теперь категорию Δ, объектами которой служат стандартные симплексы $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots$; впрочем, если вы хотите заменить гео-

метрию комбинаторикой, то вы можете заменить каждый симплекс набором его вершин и сказать, что объектами категории являются конечные множества $\{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \ldots$. В этой интерпретации морфизмами из $\{0, 1, \ldots, n\}$ в $\{0, 1, \ldots, m\}$ являются такие отображения $f: \{0, 1, \ldots, n\} \to \{0, 1, \ldots, m\}$, что $f(i) \leq f(j)$ при $i \leq j$, иначе говоря, морфизмы – это неубывающие отображения. В геометрической интерпретации таким отображениям соответствуют симплициальные отображения $\sigma^n \to \sigma^m$, переводящие вершину v_i в вершину $v_{f(i)}$.

Приведем стандартное определение: симплициальное множество – это контравариантный функтор из категории Δ в категорию множеств. Если, например, X – топологическое пространство, то мы можем построить его сингулярный комплекс; это – симплициальное множество K, относящее каждому $n = 0, 1, 2, \ldots$ множество K_n непрерывных отображений $f: X \leftarrow \sigma^n$; если $g: \sigma^n \leftarrow \sigma^m$ – морфизм категории Δ, то мы определяем $g^*: K_n \to K_m$, принимая за $g^*(f)$ композицию

$$X \xleftarrow{f} \sigma^n \xleftarrow{g} \sigma^m.$$

Иногда я буду использовать аналогичные обозначения для произвольного симплициального множества K и писать fg вместо $g^*(f)$; здесь, конечно, $f \in K_n$ и $g: \sigma^n \leftarrow \sigma^m$ есть морфизм из Δ.

Разумеется, при заданном симплициальном множестве K достаточно определить морфизмы g^* лишь для морфизмов g, пробегающих некоторое множество образующих для морфизмов категории Δ (по отношению к композиции). Имеется единственное минимальное множество образующих, и оно состоит из следующих отображений:

(i) Отображения $d_i: \{0, 1, \ldots, n-1\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$, где d_i не принимает значения i и принимает каждое из остальных значений ровно один раз. Эти отображения называются отображениями граней; вообще отображениями граней называются всякие неубывающие вложения.

(ii) Отображения $s_i: \{0, 1, \ldots, n+1\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$, где s_i принимает значение i дважды, а все остальные значения – по одному разу. Эти отображения называются отображениями вырождения; вообще отображениями вырождения называются всякие неубывающие сюръективные отображения.

Эти образующие удовлетворяют некоторым соотношениям, которые обычно нет нужды запоминать; покуда наша деятельность остается чисто теоретической, мы будем иметь дело с категорией Δ, и пусть она сама заботится о своей структуре. (Это видно на примере описанного выше подхода к понятию сингулярного комплекса.)

Пособием для изучения симплициальных множеств может служить [88][1].

Топологи обычно рассматривают симплициальные множества как приемлемую комбинаторную замену топологических пространств. Описанный выше сингулярный комплекс представляет собой функтор из топологических пространств в симплициальные множества; имеется также функтор, действующий в противоположном направлении и называемый функтором геометрической реализации. Сейчас я его опишу.

Если дано симплициальное множество K, возьмем

$$\coprod_n K_n \times \sigma^n,$$

отождествим в нем (xg, y) с (x, gy) для всех $x \in K_n$, $g : \sigma^n \leftarrow \sigma^m$ и $y \in \sigma^m$ и обозначим через $|K|$.

Имеются и другие симплициальные понятия, близкие к понятию симплициального множества. Например, симплициальная группа – это функтор из категории Δ в категорию групп, симплициальное кольцо должно быть функтором из категории Δ в категорию колец и симплициальное топологическое пространство есть функтор из категории Δ в категорию топологических пространств.

Геометрическую реализацию $|K|$ можно определить и для симплициального топологического пространства K. Для этого в предыдущем описании нужно рассматривать $K_n \times \sigma^n$ как произведение двух топологических пространств (прежде мы использовали дискретную топологию на K_n). Затем мы берем несвязное объединение

$$\coprod_n K_n \times \sigma^n$$

и переходим к факторпространству аналогично сказанному выше.

Теперь мы можем дать следующее грубое описание обобщенной бар-конструкции из [92] (§ 9 и следующие). Пусть P – монада, действующая на топологических пространствах, X – некоторое P-пространство и S – некоторый P-функтор из категории топологических пространств в себя (т.е. S есть правый функтор-модуль над функтором-алгеброй P). Тогда последовательность $K_n = SP^nX$ вместе с подходящими отображениями является симплициальным топологическим пространством. (Чтобы сказать это точнее, необходимо более детальное описание структуры категории Δ, от которого я отмахнулся страницей или двумя раньше.) Определим обобщенную бар-конструкцию формулой

$$\mathrm{Bar}(S, P, X) = |K|,$$

---

[1] См. также [157*]. – Прим. перев.

где $K_n = SP^n X$. (В литературе обычно употребляется обозначение $B(S, P, X)$, но я хочу избежать путаницы, связанной с употреблением символа B для обозначения классифицирующего пространства.)

Построение функтора B^n по Мэю осуществляется теперь следующим образом. Рассмотрим подходящую операду $\{P_{1,k}\}$, эквивалентную операде n-мерных кубиков. Превратим ее в монаду P. Тогда для любого P-пространства X можно положить

$$B^n X = Bar(\Sigma^n, P, X)$$

(см. [92], с. 338).

Этим завершается мой рассказ о методах Мэя.

§ 2.5. Машина Сигала

В этом параграфе я опишу некоторую машину, которая хотя несколько и отличается с виду от устройств, рассмотренных в § 2.2–2.4, но в действительности предназначена для тех же целей. Эта машина сконструирована Сигалом [125, 127]. Первое сообщение о ней в печати принадлежит Андерсону [16].

Я начну с попытки выделить две основные идеи подхода Сигала. Первая идея состоит в следующем. В подходах Бордмана–Фогта и Мэя (§ 2.2–2.4) частью заданной на X структуры было отображение

$$P_{1,n} \times X^n \to X.$$

Мы заменили пространство X^n бо́льшим пространством $P_{1,n} \times X^n$ для того, чтобы отображения $\mu(\mu\times 1)\colon X^3 \to X$ и $\mu(1\times\mu)\colon X^3 \to X$ могли быть различными, но все же соединенными гомотопией. Топологи рассматривают лишнюю часть произведения $P_{1,n} \times X^n$ как инертную "соединительную ткань". Первая идея Сигала состоит в том, что для наших целей не обязательно требовать, чтобы большее пространство было прямым произведением пространства параметров $P_{1,n}$ и n экземпляров пространства X; пусть оно будет еще больше и еще инертнее, лишь бы оно обладало нужными алгебраическими свойствами и имело нужный гомотопический тип.

Вторая идея Сигала связана с отысканием требуемых алгебраических свойств. Коротко говоря, она состоит в том, что категории и симплициальные множества позволяют ловко управляться с формулами типа $\mu(\mu\times 1)$ и $\mu(1\times\mu)$.

Позвольте мне начать со второй идеи. Прежде всего я утверждаю, что введенная в § 2.4 категория Δ может быть отождествлена с множеством формул типа $\mu(\mu\times 1)$, которые (i) имеют смысл для любого топологического моноида M и (ii) достаточны для построения классифицирующего пространства BM.

Более точно, пусть дан топологический моноид M. Одна из конструкций пространства BM начинается с построения некоторого симплициального топологического пространства K. Элементы пространства K_n определяются как одномерные симплициальные коциклы на σ^n со значениями в M. (В случае когда M есть дискретная группа G, эта конструкция совпадает с предложенной Эйленбергом и Маклейном конструкцией симплициального множества типа $(G,1)$.) Любой морфизм $f\colon \sigma^n\to\sigma^m$ категории Δ индуцирует отображение коциклов, т.е. отображение $f^*\colon K_n\leftarrow K_m$. Для тех, кто испытывает сомнение по поводу одномерных коциклов, я могу предложить следующее категорное определение. Рассмотрим моноид M как категорию с одним объектом, морфизмами которой являются элементы M и в которой композиция морфизмов есть умножение в M. Рассмотрим, далее, симплекс σ^n как категорию

$$0\leftarrow 1\leftarrow 2\leftarrow 3\leftarrow \ldots\leftarrow n,$$

объектами которой являются числа 0, 1, 2,..., n и (единственный) морфизм из i в j существует тогда и только тогда, когда $i\geqslant j$. Одномерный коцикл на σ^n есть ковариантный функтор из категории σ^n в категорию M. Морфизм $f\colon \sigma^n\to\sigma^m$ категории Δ можно рассматривать как функтор из категории

$$0\leftarrow 1\leftarrow 2\leftarrow \ldots\leftarrow n$$

в категорию

$$0\leftarrow 1\leftarrow 2\leftarrow \ldots\leftarrow m,$$

так что можно определить требуемые индуцированные отображения. При любом подходе мы получаем корректно определенное симплициальное топологическое пространство K.

В нашей конструкции

$$K_n\cong M^n = M\times M\times\ldots\times M \quad (n \text{ сомножителей}).$$

Действительно, имеется взаимно однозначное соответствие, относящее коциклу u набор его значений

$$u(v_0v_1),\ u(v_1v_2),\ \ldots,\ u(v_{n-1}v_n),$$

или, что эквивалентно, относящее функтору u набор его значений на морфизмах

$$0 \leftarrow 1,\ 1 \leftarrow 2,\ \ldots,\ (n-1) \leftarrow n.$$

Таким образом, категория Δ может рассматриваться как категория формул для отображений $M^n \leftarrow M^m$, формул, имеющих смысл для любого моноида. Этот класс формул достаточен для построения классифицирующего пространства моноида M, так как одна из конструкций классифицирующего пространства моноида M имеет вид

$$BM = |K|$$

(по поводу такой "геометрической реализации" см. § 2.4).

Наш "класс формул" содержит умножение $\mu: M^2 \to M$ (отвечающее отображению $d_1: б^1 \to б^2$). Нет необходимости обсуждать во всех подробностях, как получаются отображения $\mu(\mu\times 1)$, $\mu(1\times\mu)$ и информация об их равенстве; суть дела в том и состоит, что нам не нужно выписывать формулы типа $\mu(\mu\times 1)$ и $\mu(1\times\mu)$, так как категория Δ доставляет нам целый склад таких формул. И это - дополнительное преимущество, так как другие люди вложили много труда в создание и развитие теории симплициальных множеств.

Теперь мы можем выразить идеи Сигала в форме, применимой к однократному пространству петель. Пусть X - гомотопически ассоциативное H-пространство; рассмотрим X как функтор

$$\Delta \xrightarrow{X} (\text{гомотопическая категория})$$

из категории Δ в категорию пространств и гомотопических классов отображений; этот функтор переводит $б^n$ в $X^n = X\times X\times\ldots\times X$, морфизм d_1 - в умножение μ и так далее. Мы сможем построить классифицирующее пространство для X, если сможем поднять этот функтор до функтора

$$\Delta \xrightarrow{K} (\text{пространства}),$$

ибо потом мы сможем построить $|K|$. Здесь слово "поднять" означает, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & (\text{пространства}) \arrow[d] \\ \Delta \arrow[ur, "K"] \arrow[r, "X"] & (\text{гомотопическая категория}) \end{tikzcd}$$

должна быть коммутативна с точностью до естественной эквивалентности. Осталось разобраться в смысле этого последнего требования.

Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_n : \sigma^1 \to \sigma^n$ – морфизмы категории Δ, вкладывающие σ^1 в σ^n в качестве ребра $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n$ соответственно. Для симплициального топологического пространства K рассмотрим отображение

$$K_n \to K_1 \times K_1 \times \ldots \times K_1 \quad (n \text{ сомножителей})$$

с компонентами $i_1^*, i_2^*, \ldots, i_n^*$. Сигал называет симплициальное топологическое пространство K <u>специальным</u>, если для любого n это отображение

$$K_n \to K_1 \times K_1 \times \ldots \times K_1$$

является гомотопической эквивалентностью. Так как Сигал называет симплициальные топологические пространства Δ-пространствами, он говорит о специальных Δ-пространствах.

Таким образом, предлагаемый Сигалом аналог A_∞-пространства X в смысле Сташефа есть специальное Δ-пространство K с $K_1 = X$. В этом случае K_n гомотопически эквивалентно пространству $X^n = X \times \ldots \times X$ и K_n играет роль произведения $P_{1,n} \times X^n$ из § 2.2–2.4.

Само собой разумеется, эта машина работает отлично, так что стоит взглянуть, как аналогичные идеи применяются к бесконечнократным пространствам петель. Первый шаг состоит здесь в том, чтобы заменить категорию Δ категорией Γ формул вида $\mu, \mu\tau, \ldots$, которые включают в себя перестановки и имеют смысл для коммутативных моноидов.

Объектами категории Γ являются конечные множества. Не произойдет ничего страшного, если читатель будет иметь в виду множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, но технически удобнее говорить о всех конечных множествах. Для любого такого множества σ обозначим через $P(\sigma)$ множество всех его подмножеств. <u>Морфизм</u> категории Γ из σ в τ определяется как отображение $\theta : P(\sigma) \to P(\tau)$, сохраняющее дизъюнктные объединения. (В частности, отображение θ однозначно определяется своими значениями на одноэлементных подмножествах $\{i\} \subset \sigma$; эти значения должны быть попарно непересекающимися подмножествами множества τ.)

В точности так же, как мы отождествили категорию Δ (или, точнее, двойственную ей категорию) с категорией формул, имеющих смысл для моноидов, мы можем отождествить категорию, двойственную категории Γ, с категорией формул, имеющих смысл для коммутативных моноидов. С этой целью рассмотрим коммутативный моноид A и отображение

$$\theta\colon P(\sigma) \to P(\tau);$$

мы хотим определить отображение

$$\theta^*\colon \underset{i\in\sigma}{\times} A \leftarrow \underset{j\in\tau}{\times} A.$$

Для $\alpha \in \underset{j\in\tau}{\times} A$ определим i-ю компоненту образа $\theta^*\alpha$ формулой

$$(\theta^*\alpha)_i = \prod \alpha_j \mid j\in\theta\{i\},$$

где произведение $\prod \alpha_j$ берется в коммутативном моноиде A.

Очевидно, что формула, имеющая смысл для моноидов, имеет смысл и для коммутативных моноидов. Это определяет вложение $\Delta \to \Gamma$. Более точно, объекту σ^n ставится в соответствие конечное множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ и морфизму f категории Δ, рассматриваемому как неубывающее отображение

$$f\colon \{0, 1, 2, \ldots, n\} \to \{0, 1, 2, \ldots, m\},$$

ставится в соответствие морфизм $f'\colon P\{1, 2, \ldots, n\} \to P\{1, 2, \ldots, m\}$ категории Γ, определяемый формулой

$$f'\{i\} = \{j \mid f(i-1) < j \leq f(i)\}.$$

Далее, Γ-пространство K есть по определению контравариантный функтор из категории Γ в категорию пространств; из сказанного выше следует, что Γ-пространство является Δ-пространством. Мы назовем Γ-пространство <u>специальным</u>, если соответствующее Δ-пространство является специальным в указанном выше смысле.

Понятие специального Γ-пространства является одной из предлагаемых Сигалом замен понятия E_∞-пространства Бордмана - Фогта - Мэя. Уже на основании сказанного выше складывается впечатление, что оно должно отлично работать; давайте убедимся в этом, рассмотрев понятие классифицирующего пространства B. Мы уже видели, что этот круг идей удобен для построения классифицирующего про-

странства как индивидуального топологического пространства, но теперь мы хотим, чтобы результат конструкции был Γ-пространством, т.е. функтором из категории Γ в категорию пространств. Итак, пусть K есть Γ-пространство, для которого мы хотим построить классифицирующее пространство, и пусть σ есть объект категории Γ. Мы определяем значение функтора BK на σ как геометрическую реализацию функтора

$$\tau \mapsto K(\sigma \times \tau).$$

Конечно, нужно проверить, что здесь все в порядке, но и так ясно, что это очень изящная конструкция.

Этот подход был первоначально предназначен исключительно для создания теории бесконечнократных пространств петель и не применялся к теории n-кратных пространств петель, но этого достаточно для наиболее интересных приложений. Впрочем, впоследствии Кобб [52] дал набросок устройства - аналога машины Сигала, работающего в случае n-кратных пространств петель.

Другая машина, построенная на базе симплициальных идей, была предложена Барратом и Икклсом [22, 23, 24, 25, 26].

§ 2.6. Подключение теории категорий

Возникает вопрос: где взять на практике все эти высшие гомотопии, необходимые для работы машин, подобных рассмотренным в § 2.2-2.5? Ответ состоит в том, что они возникают сами собой, когда в каком-нибудь контексте появляется умножение, которое "в принципе" ассоциативно и коммутативно. Например, в теориях расслоений, рассмотренных в § 1.8, операции сложения Уитни можно считать "в принципе" ассоциативными и коммутативными; некоторое уточнение этого интуитивного утверждения сделано в [40] и [99]. Соответствующая техническая проблема состоит в том, чтобы придать выражению "в принципе" строгий смысл. В этом параграфе мы исследуем одно из возможных решений этой проблемы.

По-видимому, лучше всего начать с рассмотрения двух конкретных примеров.

ПРИМЕР 2.6.1. Пусть C - категория, объектами которой служат множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ (где $n \geqslant 0$), причем морфизмы из n-го объекта в m-й существуют тогда и только тогда, когда $n = m$; в этом случае морфизмы представляют собой взаимно однозначные соответствия, т.е. составляют симметрическую группу Σ_n.

ПРИМЕР 2.6.2. Пусть задано (дискретное) коммутативное кольцо R, и пусть $\mathcal{C}$ – категория, в которой n-й объект есть свободный модуль R^n. При этом морфизмы из R^m в R^n существуют тогда и только тогда, когда $n = m$, и в этом случае они представляют собой R-линейные взаимно однозначные соответствия, т.е. составляют матричную группу $GL(n, R)$.

Общим для этих двух категорий является наличие бифунктора $\square : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, который строго ассоциативен и обладает строгой единицей. Более точно, в обоих случаях бифунктор на объектах задается формулой

$$n \square m = n + m;$$

из этой формулы видно, что на объектах он строго ассоциативен и что 0 является его строгой единицей. Мы должны также определить функтор $\square$ на морфизмах. В примере 2.6.2 пусть $A \in GL(n,R)$ и $B \in GL(m,R)$; мы полагаем

$$A \square B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что эта операция строго ассоциативна и что единственный элемент группы $GL(0,R)$ является ее строгой единицей. Аналогично в примере 2.6.1 пусть $\sigma \in \Sigma_n$ и $\tau \in \Sigma_m$; мы обозначаем через $\sigma \square \tau$ элемент группы Σ_{n+m}, действующий как σ на $\{1, 2, \ldots, n\}$ и как τ на $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$. Очевидно, что и эта операция строго ассоциативна и что единственный элемент группы Σ_0 является ее строгой единицей.

Свойства категории $\mathcal{C}$, которые мы только что проверили для двух наших примеров, специалисты по категориям выражают словами: $\mathcal{C}$ есть <u>строго моноидальная категория</u> (см. [84], с. 157–158; впрочем, некоторые читатели, возможно, предпочтут работу [85], краткость которой уже сама по себе является почти достаточной рекомендацией.)

В примерах 2.6.1 и 2.6.2 умножение $\square$, являясь "в принципе" коммутативным, не является строго коммутативным; например, как правило,

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Вообще пусть задана категория C с описанным выше умножением $\square$; в теории категорий ее называют <u>симметричной</u>, если задан естественный изоморфизм

$$c: \square \cong \square\tau : C\times C \to C,$$

где

$$\tau: C\times C \to C\times C$$

– перестановка, т.е. функтор, определяемый формулами

$$\tau(X,Y) = (Y,X),$$

$$\tau(f,g) = (g,f).$$

Этот естественный изоморфизм должен удовлетворять некоторым аксиомам (см. [84], с. 180), которые называются <u>условиями когерентности</u>.

В примерах 2.6.1 и 2.6.2 существование изоморфизма c очевидно: например, в примере 2.6.2 можно положить

$$c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} : R^n \oplus R^m \to R^m \oplus R^n.$$

Возможно также некоторое ослабление понятия строго моноидальной категории, в котором умножение $\square$ ассоциативно и обладает единицей лишь с точностью до когерентных изоморфизмов. В этом случае говорят просто о моноидальной категории, см. [84], с. 158–159. Некоторые авторы вместо термина "симметричная строго моноидальная категория" употребляют термин "пермутативная категория" [93].

Теперь я продемонстрирую один простенький прием, позволяющий строить классифицирующее пространство категории. Пусть дана (малая) категория C; подходящим примером служит категория с одним объектом X, в которой морфизмы $X \to X$ образуют группу; но мы будем иметь дело с произвольной малой категорией. Интерпретируем каждый объект $\{0,1,2,\dots,n\}$ категории Δ как категорию

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow \dots \leftarrow n,$$

в которой морфизм (единственный) из i в j существует тогда и только тогда, когда $i \geqslant j$. (Некоторые авторы предпочитают

категорию

$$0 \to 1 \to 2 \to \ldots \to n$$

и это в конце концов приводит к тому же самому, но я при таком выборе не могу достичь согласованности между моими формулами; я думаю, все дело в том, что я пишу отображения слева от аргументов.) Положим

$$K_n = \mathrm{Hom}(0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow \ldots \leftarrow n, C),$$

т.е. определим K_n как множество функторов из категории $0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow \ldots \leftarrow n$ в категорию C. Элементы этого множества напоминают одномерные коциклы со значениями в C (ср. § 2.5). Морфизм категории Δ есть не что иное, как функтор из категории $0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow \ldots \leftarrow n$ в категорию $0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow \ldots \leftarrow m$, так что такой морфизм индуцирует отображение $K_n \leftarrow K_m$; мы получаем некоторое симплициальное множество K. Это симплициальное множество называется нервом категории C, и мы будем обозначать его через $\mathrm{Nerve}(C)$.

Согласно определению Сигала [124], классифицирующее пространство категории C есть

$$BC = |\mathrm{Nerve}(C)|,$$

т.е. для построения BC надо взять нерв $\mathrm{Nerve}(C)$ категории C и его геометрическую реализацию (см. § 2.4).

Если в категории C имеется лишь один объект, причем его морфизмы образуют дискретную группу π, то $\mathrm{Nerve}(C)$ превращается в симплициальное множество $K(\pi, 1)$, построенное Эйленбергом и Маклейном, и BC является наилучшей моделью классифицирующего пространства $B\pi$ группы π, которое в свою очередь является пространством Эйленберга – Маклейна типа $(\pi, 1)$.

В примерах 2.6.1 и 2.6.2 категория C сводится к последовательности дискретных групп G_n, так что BG сводится к

$$\coprod_{n \geq 0} BG_n.$$

Если у нас есть бифунктор $\square$, превращающий C в строго моноидальную категорию, то, используя его надлежащим образом, мы можем сделать BC строгим моноидом.

Соответствующий общий результат выглядит следующим образом.

ПРЕДТЕОРЕМА 2.6.3. Если C есть симметричная моноидальная категория, то BC есть E_∞-пространство.

См. [93], с.78.

Мы предпочли обойтись в этой формулировке без слова "строгий", потому что так удобнее для некоторых примеров. Предположим, например, что мы рассматриваем вариант примера 2.6.2, в котором объектами категории C являются конечно порожденные проективные R-модули, а морфизмами являются изоморфизмы; нам вряд ли захочется превращать эту категорию в строго моноидальную категорию. Однако, так как мы всегда можем добиться "строгости" соответствующими категорными построениями [72], то нам нет нужды проявлять беспокойство.

Замечу, что примеры 2.6.1 и 2.6.2 показывают, что уровень общности, принятый в § 2.3, не является чрезмерным. В этих примерах BC является E_∞-пространством, и мы можем воспользоваться этим обстоятельством для построения спектра $Y = B^\infty(BC)$. Однако пространство $\Omega^\infty Y$ не эквивалентно BC, потому что $\pi_0(BC)$ не является группой; в примерах 2.6.1 и 2.6.2 $\pi_0(BC)$ есть $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, моноид неотрицательных чисел по сложению. Поэтому связь между BC и $\Omega^\infty Y$ несколько сложнее; мы обсудим ее в § 3.2.

Откладывая это обсуждение до § 3.2, я ограничусь утверждением, что в примере 2.6.1

$$BC = \coprod_{n \geq 0} B\Sigma_n, \quad Y = \Sigma^\infty S^0, \quad \Omega^\infty Y = \Omega^\infty \Sigma^\infty S^0 = \lim_{n \to \infty} \Omega^n S^n,$$

в то время как пример 2.6.2 приводит к алгебраической K-теории.

Остается сказать, что изложенное представляет собой лишь значительно упрощенный вариант теории, построенной к настоящему времени. Например, в примере 2.6.2 я рассматривал дискретное кольцо R, а можно рассматривать топологическое кольцо R, скажем, поле действительных или комплексных чисел; это позволяет включить в рамки нашей теории топологическую K-теорию. При этом, конечно, надо топологизировать и категорию C. Здесь можно не останавливаться на полпути и считать, что как множество $Ob(C)$ объектов категории C, так и множество $Mor(C)$ ее морфизмов являются топологическими пространствами и что четыре структурных отображения

область определения: $\mathrm{Mor}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(C)$,

область значений: $\mathrm{Mor}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(C)$,

тождественный морфизм: $\mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Mor}(C)$,

композиция: $\mathrm{Mor}(C) \times_{\mathrm{Ob}(C)} \mathrm{Mor}(C) \longrightarrow \mathrm{Mor}(C)$

непрерывны. Это не вносит существенных изменений в построение классифицирующего пространства BC, так как в § 2.4 мы определили не только геометрическую реализацию симплициальных множеств, но и геометрическую реализацию симплициальных топологических пространств. Предтеорема 2.6.3 остается при этом справедливой.

§ 2.7. Кольцевые теории

В этом параграфе я сделаю несколько, возможно несвоевременных, замечаний о мультипликативных структурах.

В алгебраической топологии обычно считают, что чем богаче алгебраическая структура, тем лучше. В частности, имеется понятие мультипликативной обобщенной теории когомологий; в такой теории k^* задано умножение

$$k^p(X) \otimes k^q(X) \longrightarrow k^{p+q}(X),$$

или, если читатель предпочитает внешние умножения, заданы спаривания

$$k^p(X) \otimes k^q(Y) \longrightarrow k^{p+q}(X \times Y)$$

или

$$\tilde{k}^p(X) \otimes \tilde{k}^q(Y) \longrightarrow \tilde{k}^{p+q}(X \wedge Y).$$

Специалисты по стабильной теории гомотопий позаботились о том, чтобы в теории спектров существовали понятия, соответствующие этим понятиям теории обобщенных когомологий. Прежде всего необходимо определить приведенное произведение $\mathbf{E} \wedge \mathbf{F}$ двух спектров; после этого можно ввести понятие "кольцевого спектра" $\mathbf{E}$ как спектра с умножением

$$\mu : \mathbf{E} \wedge \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E},$$

удовлетворяющим надлежащим аксиомам. К числу кольцевых спектров

относятся такие хорошо известные спектры, как спектр $\mathbf{MU}$, и каждому кольцевому спектру отвечает мультипликативная теория когомологий. Подробности читатель найдет в [9][1], но я должен отметить, что хотя изложенная там конструкция приведенного произведения спектров пригодна для указанных выше целей, она, возможно, не будет достаточна для решения более серьезных задач.

Другие примеры показывают со всей определенностью, что целесообразно рассматривать пространства X с двумя различными структурными отображениями $\alpha, \mu: X\times X \to X$, которые можно представлять себе как "сложение" и "умножение".

Возьмем, например, пространство $X = \Omega^n S^n$; в нем имеется операция сложения $\alpha: X\times X \to X$, которая возникает из равенства $X = \Omega(\Omega^{n-1} S^n)$ и использует "сложение петель", имеющееся в любом пространстве вида ΩY; имеется также операция умножения $\mu: X\times X \to X$, возникающая из интерпретации пространства X как множества пунктированных отображений $S^n \to S^n$ и использующая композицию таких отображений. Строго говоря, в этом примере желательно сделать переход к пределу при $n \to \infty$.

Пространство X с двумя такими операциями α, μ можно назвать <u>кольцевым пространством</u>. Точнее, X называется <u>кольцевым объектом гомотопической категории</u>, если α и μ превращают функтор $W \to [W, X]$ в функтор со значениями в категории колец. Это, конечно, налагает условия (с точностью до гомотопии) на отображения α и μ, как порознь, так и вместе; например, с точностью до гомотопии должна иметь место дистрибутивность.

В частности, для кольцевого спектра $\mathbf{E}$ группа 0-мерных когомологий $E^0(W)$ задает функтор в категорию колец, вследствие чего пространство $\Omega^\infty \mathbf{E}$ является кольцевым объектом гомотопической категории. Например, в случае K-теории мы получаем, что пространство $X = \mathbb{Z}\times BU$ является кольцевым пространством, в котором сложение $\alpha: X\times X \to X$ индуцировано сложением Уитни векторных расслоений, а умножение $\mu: X\times X \to X$ индуцировано тензорным умножением векторных расслоений.

Однако можно пойти еще дальше и потребовать, чтобы α и μ удовлетворяли соответствующим условиям не только с точностью до

---

[1]) Изложение той же самой конструкции приведенного умножения можно найти в более доступной советскому читателю книге [168*], русский перевод которой готовится в издательстве "Наука". – <u>Прим. перев.</u>

гомотопии, но и с точностью до высших гомотопий, аналогичных рассматривавшимся в § 2.2 и 2.3. Так мы приходим к понятию кольцевого E_∞-пространства.

Пусть имеется категория с двумя согласованными моноидальными структурами в смысле § 2.6. Например, в качестве C можно взять категорию конечных множеств с операциями дизъюнктного объединения и декартова умножения. При этом можно надеяться, что построенное в § 2.6 классифицирующее пространство BC окажется кольцевым E_∞-пространством.

Понятие кольцевого E_∞-пространства должно быть отправной точкой очень интересной и содержательной теории. Читатель мог бы надеяться, что имеет место аналог предтеоремы 2.3.2, который показал бы, что исследование E_∞-H-пространств X фактически равнозначно исследованию спектров. Однако спектральный двойник кольцевого E_∞-пространства должен быть спектром с бесконечным количеством дополнительных структур. Легко понять, откуда они берутся: напишите какую-нибудь фразу типа "кольцевой спектр E с умножением μ, которое коммутативно и ассоциативно с точностью до высших гомотопий", а затем постепенно пытайтесь придать этой фразе смысл. Для того чтобы сделать это, в высшей степени желательно иметь определение приведенного умножения спектров, более близкое к идеальному; в частности, это умножение должно быть почти столь же ассоциативным, как декартово умножение пространств. Чтобы сделать это, было необходимо пересмотреть самые основания теории спектров. Такой пересмотр был предпринят, и результатом явилось понятие бескоординатного спектра, см. [99], гл. 2. Обычный спектр включает в себя по одному пространству E_n для каждого n. Бескоординатный спектр состоит из пространств $E(V)$, определенных для каждого конечномерного линейного подпространства V пространства $\mathbb{R}^\infty$; при этом изоморфизмам $V \to V'$, удовлетворяющим определенным условиям, отвечают гомеоморфизмы $E(V) \to E(V')$. Последние, по существу, сокращают объем данных до прежнего уровня, но в то же время они доставляют возможность автоматического контроля за неприятностями, возникающими обычно из-за перестановок координат в надстройках. Я нисколько не сомневаюсь в достоинствах бескоординатных спектров: они позволяют усовершенствовать приведенные произведения и должным образом контролировать их поведение; но все же я не желаю тратить время на их более подробное обсуждение. Скажу лишь, что при помощи связанных с бес-

координатными спектрами технических деталей удается дать удовлетворительное определение кольцевого E_∞-спектра.

Некоторые считают, и это кажется вполне правдоподобным, что кольцевые E_∞-спектры окажутся полезными при изучении проблем, требующих очень точной информации о мультипликативных структурах, как, например, проблемы ориентируемости сферических расслоений в обобщенных теориях когомологий.

Имеется также чуть более слабое понятие кольцевого H_∞-спектра. Это спектральный аналог понятия пространства, структуризованного отображениями

$$(E\Sigma_n)\times_{\Sigma_n}(X\wedge X\wedge\ldots\wedge X)\to\Sigma^{?}X,$$

удовлетворяющими условиям гомотопической коммутативности некоторых диаграмм. Это понятие, возможно, покажется гомотопическим топологам привлекательным; оно доставляет подходящий контекст для доказательства, например, теоремы Нисиды о нильпотентности [113]. По поводу кольцевых H_∞-спектров см. [98].

И в заключение параграфа несколько общих слов. Я не сомневаюсь, что намеченные здесь теории могут быть построены, до известной степени уже построены и, безусловно, заслуживают построения. Ибо стоит вводить мультипликативные структуры везде, где это только возможно. Однако я пока не готов обсуждать это более подробно и отсылаю читателя к [99, 98].

Глава 3

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И ГРУППОВОЕ ПОПОЛНЕНИЕ

§ 3.1. Локализация

В этой главе мы увидим, что одно пространство может очень походить на другое пространство, не будучи ему эквивалентным. Я собираюсь описать в ней две конструкции; каждая из них перерабатывает пространство X в некоторое другое пространство, родственное, но не эквивалентное ему. Начну с локализации, которая проникла в топологии всюду.

В теории гомотопий идея рассмотрения 2-примарных проблем отдельно от 3-примарных восходит к Серру [130]. В алгебре имеется функториальная конструкция, позволяющая выделить 2-примарные проблемы, пренебрегая 3-примарными, 5-примарными и другими проблемами. Это достигается локализацией. Например, если ваша проблема касается $\mathbb{Z}$-модулей, вы можете ввести кольцо $\mathbb{Z}_{(2)}$ – кольцо целых чисел, локализованное по двойке,– как множество дробей $a/b \in \mathbb{Q}$, для которых b нечетно. Тогда локализацией $\mathbb{Z}$-модуля M по двойке будет $M_{(2)} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(2)}$. Эффект этой конструкции состоит в том, что 2-примарные проблемы остаются неизменными, а 3-примарные, 5-примарные и другие проблемы пропадают. Если же, наоборот, нужно избавиться от 2-примарных проблем и оставить все остальные, то можно воспользоваться произведением $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/2]$.

По-видимому, первым, кто полностью осознал, что в теории гомотопий имеется аналог алгебраической локализации, был Сулливан [149, 150]. Безусловно, открытие Сулливана имело широкий резонанс еще до того, как оно было опубликовано; надо отметить также, что некоторые математики работали в этом направлении независимо и опубликовали свои работы раньше.

Мы начнем рассмотрение этого предмета со следующего вопроса:

как ввести коэффициенты в обобщенную теорию гомологий? Итак, пусть A - абелева группа. Путь решения нашей задачи абсолютно ясен. Вначале мы построим пространство Мура Y, т.е. пространство с единственной нетривиальной группой гомологий, равной A. Например, выберем свободную $\mathbb{Z}$-резольвенту группы A, скажем

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{d} F \longrightarrow A \longrightarrow 0;$$

беря надлежащие букеты сфер, мы можем добиться, чтобы имели место изоморфизмы

$$H_n(\bigvee_{\beta\in B} S^n) \cong R,$$

$$H_n(\bigvee_{\gamma\in\Gamma} S^n) \cong F;$$

после этого можно построить такое отображение

$$f\colon \bigvee_{\beta\in B} S^n \longrightarrow \bigvee_{\gamma\in\Gamma} S^n,$$

что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_n(\bigvee_{\beta\in B} S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\bigvee_{\gamma\in\Gamma} S^n) \\ \updownarrow\cong & & \updownarrow\cong \\ R & \xrightarrow{\quad d \quad} & F \end{array}$$

будет коммутативна. Нам остается положить

$$Y = (\bigvee_{\gamma\in\Gamma} S^n) \cup_f C(\bigvee_{\beta\in B} S^n).$$

Предположим теперь, что нам задана обобщенная теория гомологий k_*. Тогда можно определить соответствующую теорию с коэффициентами, положив

$$\tilde{k}_m(X;A) = \tilde{k}_{n+m}(X\wedge Y).$$

Из сказанного видно, что справедлива теорема об универсальных коэффициентах в виде точной последовательности

$$0 \longrightarrow \tilde{k}_m(X)\otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \tilde{k}_m(X;A) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(\tilde{k}_{m-1}(X),A) \longrightarrow 0.$$

Отсюда совершенно ясно, как ввести коэффициенты в спектр. А именно, определим по спектру $\mathbf{E}$ новый спектр $\mathbf{F}$ формулой

$$F_m = E_{m-n}\wedge Y.$$

Если ограничиться случаем, когда в A отсутствует кручение, мы

10-1

получаем изоморфизмы

$$\pi_n(F) \cong \pi_n(E) \otimes A,$$

$$H_n(F) \cong H_n(E) \otimes A.$$

Таким образом, мы определили функтор на категории спектров, действие которого на гомотопические группы π_n и группы гомологий H_n выражается тензорным умножением на A.

Возникает вопрос: существует ли конструкция на пространствах, согласующаяся на бесконечнократных пространствах петель с приведенной конструкцией для спектров? Я говорю "пространства", но нам вполне достаточно односвязных CW-комплексов. Впрочем, теорию можно сделать нечувствительной к некоторому количеству неприятностей, чинимых фундаментальной группой, но не особенно большому, и я воздержусь от обсуждения этой возможности.

Случай, когда A есть подкольцо кольца рациональных чисел, не вызывает никаких затруднений. В этом случае $\mathbb{Z}$-модуль M называется <u>A-локальным</u>, если он допускает структуру A-модуля. (Если такая структура существует, то она единственна; более того, произвольный $\mathbb{Z}$-гомоморфизм таких A-модулей является A-гомоморфизмом.) Пусть X - односвязный CW-комплекс. Назовем его <u>A-локальным</u>, если (i) A-локальны его гомотопические группы $\pi_n(X)$ или, что эквивалентно, (ii) A-локальны его группы гомологий $H_n(X)$.

ТЕОРЕМА 3.1.1 (Сулливан [149], с. 49). <u>Пусть X - односвязный CW-комплекс и A - подкольцо кольца рациональных чисел. Тогда существуют односвязный CW-комплекс Y и отображение $i: X \to Y$ со следующими свойствами:</u>

(i) <u>Пространство Y A-локально и отображение $i: X \to Y$ универсально как отображение пространства X в A-локальное пространство.</u>

(ii) <u>Отображение i локализует гомотопические группы, т.е. гомоморфизм</u>

$$i_*: \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$$

<u>индуцирует изоморфизм</u>

$$\pi_n(X) \otimes A \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y).$$

(iii) <u>Отображение i локализует группы целочисленных гомо-</u>

логий, т.е. гомоморфизм

$$i_*: H_*(X) \to H_*(Y)$$

индуцирует изоморфизм

$$H_*(X) \otimes A \xrightarrow{\cong} H_*(Y).$$

Такое пространство Y мы будем обозначать через XA и рассматривать его как "пространство X, локализованное введением коэффициентов из A". Например, $X\mathbb{Z}[1/2]$ означает такую локализацию пространства X, при которой удаляются связанные с ним 2-примарные проблемы и т.д.

Позвольте мне привести набросок двух предложенных Сулливаном методов для построения пространства Y. Прежде всего заметим, что если X есть сфера S^n, то результат конструкции диктуется условием (iii): за пространство Y следует принять пространство Мура типа (A, n). Но произвольный CW-комплекс можно построить, последовательно приклеивая клетки CS^n. Скопируем эту процедуру и построим пространство Y, последовательно приклеивая конусы над пространствами Мура. Конечно, чтобы осуществить такую процедуру, необходимы соответствующие отображения, по которым мы будем приклеивать наши конусы, но для этого существуют индуктивные предположения и леммы.

Второй метод двойствен первому. Заметим, что если X - пространство Эйленберга - Маклейна типа (π, n), то результат конструкции диктуется условием (ii): за пространство Y следует принять пространство Эйленберга - Маклейна типа ($\pi \otimes A$, n). Но для любого пространства определена башня Постникова, т.е. пространство X можно представить как итерированное расслоение, сложенное из пространств Эйленберга - Маклейна. Пространство Y мы снова строим индуктивно, последовательно локализуя пространства в башне Постникова пространства X. Последняя фраза предыдущего абзаца при этом тоже дуализируется.

В дальнейшем нам будет удобно обозначать пространство Эйленберга - Маклейна типа (π, n) через $EM(\pi, n)$ [1].

Теперь я должен сказать кое-что о роли локализации в современной топологии. Отчасти она необходима как язык, позволяющий формулировать результаты, которые без локализации либо вообще нельзя было бы сформулировать, либо можно было бы сформулировать в

---

[1] В гл. 2 один раз промелькнуло более привычное обозначение $K(\pi, n)$. - Прим. перев.

10-2

менее удобной форме. (Конечно, эти результаты могут иметь и такие следствия, которые прекрасно формулируются без всякой локализации.) В качестве примера первого типа можно привести утверждение из книги Сулливана [149], с. 63: имеются гомотопические эквивалентности

$$(F/\mathrm{Top})\mathbb{Z}[1/2] \cong BO\mathbb{Z}[1/2],$$

$$(F/\mathrm{Top})\mathbb{Z}_{(2)} \cong \prod_n EM(\pi_n, n),$$

где π_n – следующие группы:

$$\begin{array}{lccccc} n \equiv 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \mathrm{mod}\,4 \\ \pi_n = \mathbb{Z}_{(2)} & 0 & \mathbb{Z}/2 & 0 & \mathbb{Z}_{(2)} & \end{array}$$

Поскольку с 2-примарной точки зрения пространство F/Top устроено не так, как с p-примарной при нечетном p, то вряд ли можно описать F/Top, не разделив простые числа. Применения сформулированного результата лежат в теории многообразий.

Другой пример – приводимая ниже теорема 6.2.1 (теорема Адамса – Придди) в формулировке использует локализацию и без локализации была бы неверна.

Пример второго типа доставляет приводимая ниже теорема 5.1.1 (гипотеза Адамса), первоначально сформулированная без помощи локализации. Ее формулировка с локализацией намного удобнее и яснее. По первоначальному замыслу этот результат предполагалось применить для изучения J-гомоморфизма в теории гомотопий.

Как только возникает истинная необходимость в некотором математическом языке, он появляется. Едва ли нужно обсуждать его роль как технического средства. (Это высказывание не исключает, конечно, возможности введения теми или иными авторами языка, без которого можно обойтись.) Тем не менее мне хотелось бы проиллюстрировать полезность локализации несколькими примерами.

Локализацию можно использовать для построения конечных H-пространств, отличных от классических. Например, можно построить конечный комплекс X, который является H-пространством и на 2-примарный взгляд похож на $Sp(2)$, а на 3-примарный – на $S^3 \times S^7$. Это пространство X – и не $Sp(2)$ (посмотрите на него сквозь 3-примарные очки), и не $S^3 \times S^7$ (рассмотрите его с 2-примарной позиции). Это, вероятно, один из чистейших примеров

применения так называемого перемешивания по Забродскому [156]. Он чем-то напоминает монстров из средневековых сказок: голова льва на теле лошади. Еще более жуткий способ заключается в том, чтобы взять две части животного и составить их, повернув одну из частей: возьмите льва, отрубите ему голову, а затем приделайте ее, обратив пастью назад. Именно так строится пример Хилтона – Ройтберга [67, 68]; роль льва играет пространство $Sp(2)$.

В следующем примере мы отведем роль льва пространству HP^{∞} – бесконечномерному проективному пространству над телом кватернионов. Я утверждаю, что существует 3-связный CW-комплекс X со следующими тремя свойствами: (i) $\Omega X \cong S^3$. (ii) Для всех простых p имеется гомотопическая эквивалентность $X\mathbb{Z}_{(p)} \cong HP^{\infty}\mathbb{Z}_{(p)}$. Эти первые два свойства указывают на сходство этого пространства X с HP^{∞}; пространства с этими свойствами изучались Ректором [121]. Но третье свойство противоположно этим двум. Напомним (см., например, § 1.8), что для любого отображения $f: X \to BU$ определен полный класс Чженя. (iii) Если полный класс Чженя отображения f конечен, то он равен 1. Это условие означает почти полное отсутствие конечномерных векторных расслоений над X, и в этом отношении X совсем не похоже на HP^{∞}.

Конечно, при использовании локализации бывает необходимо знать кое-что такое, чего я не сказал. Теоремы 3.1.1 вполне достаточно, пока нас интересует переход от пространства к его локализации. Но иногда нужно двигаться в противоположном направлении: зная локализованные пространства, восстановить глобальную картину, т.е. свойства исходного, нелокализованного пространства. Рискуя показаться поверхностным, я ограничусь изложением двух результатов, с которыми, пожалуй, читателю лучше ознакомиться, чем пропустить их.

Первый результат полезен при объединении информации, полученной по двум множествам простых чисел. Пусть A и B – подкольца в кольце рациональных чисел. Тогда можно построить следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} A\cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A\otimes B \end{array}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.2. Для каждого односвязного CW-комплекса X коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X(A\cap B) \arrow[r] \arrow[d] & XA \arrow[d] \\ XB \arrow[r] & X(A\otimes B) \end{tikzcd}$$

является как декартовым, так и кодекартовым квадратом. Более того, если W - конечный односвязный CW-комплекс, то отображение

$$W \xrightarrow{f} X(A\cap B)$$

с точностью до гомотопии восстанавливается по двум композициям

$$\begin{tikzcd} & & XA \\ W \arrow[r] & X(A\cap B) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & XB \end{tikzcd}$$

иными словами, для отображений конечных комплексов выполнено сильное условие Майера - Вьеториса.

Второй результат полезен, если мы пожелаем собрать воедино информацию, полученную отдельно для каждого простого p.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.3. (a) Пусть W и X - односвязные CW-комплексы, причем комплекс W конечен. Тогда отображение

$$W \xrightarrow{f} X$$

с точностью до гомотопии восстанавливается по композициям

$$W \xrightarrow{f} X \longrightarrow X\mathbb{Z}_{(p)}$$

(где p пробегает все простые числа).

(b) Предположим теперь, что гомотопические группы комплекса X конечно порождены, по крайней мере в размерностях $\leq \dim W$. Пусть даны отображения

$$W \xrightarrow{f_p} X\mathbb{Z}_{(p)}$$

(по одному для каждого простого p), такие, что все композиции

$$W \xrightarrow{f_p} X\mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow X\mathbb{Q}$$

лежат в общем гомотопическом классе, не зависящем от p. Тогда существует отображение

$$W \xrightarrow{f} X,$$

такое, что для каждого p композиция

$$W \xrightarrow{f} X \to XZ_{(p)}$$

гомотопна f_p.

Ограничения в этих предложениях отбросить нельзя.

Для дальнейшего чтения о локализациях и ссылок я рекомендовал бы [45, 46, 64, 65, 66, 97, 109] (а также [158*]. - Перев.).

§ 3.2. Плюс-конструкция[1] и групповое пополнение

Теперь мы займемся следующей задачей. Имеются два пространства X и Y и отображение $f: X \to Y$, индуцирующее изоморфизмы групп гомологий, однако фундаментальные группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$ сильно различаются, а потому, чтобы гомологии были одинаковы, должны сильно различаться и высшие гомотопические группы. Возможна несколько другая ситуация: индуцированный гомоморфизм $f_*: H_*(X; A) \to H_*(Y; A)$ является изоморфизмом лишь для некоторой подходящей группы коэффициентов A.

Впервые о возможности такой ситуации я узнал из работы Квиллена [118]. В роли Y там выступает пространство BU. Чтобы построить X, выберем сначала некоторое простое p. Пусть F_p - конечное поле из p элементов, и пусть $\bar{F}_p$ - алгебраическое замыкание поля F_p. Пусть, далее,

$$GL(\infty, \bar{F}_p) = \bigcup_n GL(n, \bar{F}_p)$$

- бесконечномерная линейная группа над полем $\bar{F}_p$. Мы будем рассматривать ее как дискретную группу, поскольку другой разумной топологии на ней нет. В качестве пространства X возьмем классифицирующее пространство $BGL(\infty, \bar{F}_p)$. Это пространство Эйленберга - Маклейна, у которого фундаментальной группой является эта громадная неабелева группа $GL(\infty, \bar{F}_p)$, а все высшие гомотопические группы тривиальны. И все же Квиллен построил отображение

$$f: BGL(\infty, \bar{F}_p) \to BU$$

и показал, что индуцированный гомоморфизм

$$f^*: H^*(BGL(\infty, \bar{F}_p); A) \leftarrow H^*(BU; A)$$

---

[1] В некоторых работах принят термин квилленизация. - Прим. перев.

является изоморфизмом для любой конечной группы A, не имеющей p-кручения. Но это значило, что в оставшейся части рассуждения Квиллена пространство $BGL(\infty, \bar{F}_p)$ могло служить вполне приемлемой заменой пространства BU, поскольку рассуждение основывалось на теории препятствий. Существа и цели рассуждения Квиллена я коснусь позднее (см. гл. 5).

Квиллен рассмотрел также и случай пространств $Y = BO$, $X = BO(\infty, \bar{F}_p)$ (p нечетно).

Такое отображение Квиллен строит с помощью теории представлений, используя результаты Брауэра и Грина. А когда хорошее отображение уже построено, очень хочется доказать, что в когомологиях оно индуцирует изоморфизм, путем прямого вычисления обеих групп когомологий; впрочем, Квиллен почти так и поступил, хотя и оформил это элегантнее.

Если кто-нибудь пожелает разобраться в истинной причине справедливости этого результата (хотя это, возможно, теологическая проблема), ее, по-видимому, стоит поискать в алгебраической геометрии и этальной теории гомотопий. Однако подобное, конечно, неверно в отношении примера, который я узнал вторым.

Пусть

$$\Sigma_\infty = \bigcup_n \Sigma_n$$

– бесконечная симметрическая группа. Положим $X = B\Sigma_\infty$ и

$$Y = \Omega^\infty \Sigma^\infty S^0 = \lim_{n \to \infty} \Omega^n S^n.$$

Соответствующий результат для этого случая первым, по-моему, опубликовал Придди [114]. Однако почти каждый, кто занимался этим предметом, имеет, как мне кажется, свой любимый подход к нему. Элементарное доказательство упомянутой теоремы достаточно просто: можно явно указать отображение

$$f: B\Sigma_\infty \to \Omega^\infty \Sigma^\infty S^0$$

и прямой проверкой убедиться, что

$$f_*: H_*(B\Sigma_\infty; A) \to H_*(\Omega^\infty \Sigma^\infty S^0; A)$$

есть изоморфизм для любой группы коэффициентов A.

Если вы пожелаете найти истинную причину справедливости этого результата, то (с той же оговоркой, что и выше) она, возможно, такова: при построении модели пространства $\Omega^\infty \Sigma^\infty S^0$

с помощью метода Мэя или с помощью любого другого имеющегося метода вы используете только пространства $B\Sigma_n$ и ничего больше. Однако это замечание приводит к новому вопросу, а именно: в каком смысле эта модель аппроксимирует пространство $\Omega^\infty\Sigma^\infty S^0$?

Сейчас известно, что такая ситуация типична: Кан и Терстон в работе [76] показали, что почти любое пространство можно гомологически аппроксимировать пространством Эйленберга – Маклейна $EM(\pi, 1)$, где π – некоторая таинственная искусственно построенная группа. Однако нас больше интересуют случаи, когда такая ситуация возникает естественным образом.

Я перехожу теперь к первому способу описания такой ситуации. Я думаю, что этот способ изобрел Квиллен [117] в связи с попыткой дать топологическое истолкование функтора Милнора $K_2(R)$. Пусть X – топологическое пространство, и пусть π – нормальная подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(X)$, причем эта подгруппа совершенна, т.е. $[\pi, \pi] = \pi$. В первом примере мы возьмем $X = B\Sigma_\infty$ и примем за π знакопеременную подгруппу группы Σ_∞. Во втором примере мы возьмем $X = BGL(\infty, R)$, а за группу π примем подгруппу группы $GL(\infty, R)$, порожденную элементарными матрицами. Тогда можно построить пространство X^+ и отображение $i: X \to X^+$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(i) $i_*: \pi_1(X) \to \pi_1(X^+)$ – эпиморфизм с ядром π.

(ii) Пусть группа $\pi_1(X^+)$ действует на некоторой абелевой группе A, так что на X^+ и на X возникают локальные системы коэффициентов. Тогда

$$i^*: H^*(X; A) \longleftarrow H^*(X^+; A)$$

– изоморфизм.

Эта конструкция известна как <u>плюс-конструкция Квиллена</u>. Она позволяет сильно уменьшить фундаментальную группу пространства, не изменяя его когомологий. Принято не приводить детали этой конструкции. В исходном сообщении Квиллен вместил в одну лекцию материал, которого хватило бы на три, а последующие авторы вовсе отказывались отводить место "уже известному". (Заслуживает, однако, похвалы Вагонер [154], проявивший внимание к своим читателям.) И все же я не пожалею на это места.

Идея заключается в том, чтобы сначала, добавив двумерные клетки, убить группу π, а затем, приклеив трехмерные клетки, нейтрализовать воздействие двумерных клеток на когомологии. Более подробно это делается так. Можно считать, что X есть CW-комплекс. Пусть $p: \tilde{X} \to X$ – регулярное накрытие, соответствующее нормальной подгруппе $\pi \subset \pi_1(X)$. Возьмем произвольный элемент

$x \in \pi$. Поскольку подгруппа π совершенна, этот элемент допускает представление вида

$$x = \prod_{i=1}^{m} [y_i, z_i],$$

где y_i, $z_i \in \pi$. Пусть X^1 и $\tilde{X}^1$ - одномерные остовы комплексов X и $\tilde{X}$. Так как отображение

$$\pi_1(\tilde{X}^1) \to \pi_1(\tilde{X}) = \pi$$

эпиморфно, можно подобрать элементы $\bar{y}_i$ и $\bar{z}_i$ из $\pi_1(\tilde{X}^1)$, которые переходят при этом отображении в y_i и z_i. Можно построить новый комплекс Y, приклеивая к X двумерную клетку по приклеивающему отображению из класса

$$p_* \prod_{i=1}^{m} [\bar{y}_i, \bar{z}_i].$$

Накрытие $\tilde{X}$ пространства X продолжается до накрытия $\tilde{Y}$ пространства Y. Это пространство $\tilde{Y}$ получается из пространства Y приклеиванием двумерных клеток, одна из которых приклеивается по отображению из класса

$$\prod_{i=1}^{m} [\bar{y}_i, \bar{z}_i],$$

а остальные получаются применением элементов группы $G = \pi_1(X)/\pi$ скольжений накрытия.

Мы проделаем эту процедуру для множества элементов $x \in \pi$, порождающих π как нормальную подгруппу π. Пространства, которые получатся в результате этого, мы снова обозначим через Y и $\tilde{Y}$. Тогда пространство $\tilde{Y}$ односвязно, и, согласно теореме Гуревича,

$$\pi_2(\tilde{Y}) \cong H_2(\tilde{Y}).$$

Поскольку использованные при построении $\tilde{Y}$ приклеивающие отображения гомологичны нулю в $\tilde{Y}^1$, имеется разложение

$$H_2(\tilde{Y}) \cong H_2(\tilde{X}) \oplus F,$$

где F - свободный $\mathbb{Z}[G]$-модуль (от образующих, соответствующих клеткам, которые мы добавляем к X). Предположим, что образы элементов $f_\alpha \in \pi_2(\tilde{Y}^2)$ при изоморфизме Гуревича составляют $\mathbb{Z}[G]$-базис в F. Мы определяем X^+ как пространство, полученное из Y приклеиванием трехмерных клеток по отображениям из классов $p_* f_\alpha$. Накрывающее пространство $\tilde{X}^+$ допускает такое же прямое описание, как $\tilde{Y}$. Для каждого α имеется одна трехмерная клетка, приклеенная по отображению из класса f_α, а также клетки, полученные из нее преобразованиями из группы G. Если воспользоваться клеточными цепями, то комплекс относительных цепей $C_*(\tilde{X}^+, \tilde{X})$ принимает вид

$$\ldots 0 \longrightarrow F \xrightarrow{\cong} F \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Таким образом, вложение $C_*(\tilde{X}) \to C_*(\tilde{X}^+)$ является цепной эквивалентностью над $\mathbb{Z}[G]^*$. Свойства (i) и (ii) доказаны.

Теперь мы можем дать первую квилленовскую конструкцию высших групп алгебраической K-теории. Именно, возьмем пространство $BGL(\infty, R)$ и применим к нему плюс-конструкцию, взяв в качестве π подгруппу в $GL(\infty, R)$, порожденную элементарными матрицами. После этого мы полагаем

$$K_i(R) = \pi_i((BGL(\infty, R))^+).$$

Конечно, в этом случае необходимо, чтобы условия (i) и (ii) определяли X^+ с точностью до канонической гомотопической эквивалентности. Это доказывается непосредственно с помощью теории препятствий. При этом применяется условие (ii), в котором в качестве системы коэффициентов A берутся гомотопические группы одного из кандидатов на пространство X^+ - будем обозначать их просто через $\pi_n(X^+)$. Но во всех интересных случаях X^+ является H-пространством, а следовательно, действие группы $\pi_1(X^+)$ на $\pi_n(X^+)$ тривиально. Возникает ощущение, что, может быть, можно избавиться от суеты и неприятностей, связанных с локальными коэффициентами.

К сожалению, наших данных недостаточно, чтобы ввести на X^+ структуру H-пространства или даже просто доказать тривиальность действия $\pi_1(X^+)$ на $\pi_n(X^+)$. Тем не менее в наших примерах кое-что можно проверить непосредственно. Рассмотрим, например, случай $X = B\Sigma_\infty$. Мы можем построить гомоморфизм $\mu: \Sigma_\infty \times \Sigma_\infty \to \Sigma_\infty$, заставляя первый сомножитель Σ_∞

переставлять нечетные числа, а второй сомножитель Σ_∞ – четные числа. Конструкция классифицирующего пространства преобразует произведения в произведения, поэтому мы получаем отображение

$$B\mu\colon B\Sigma_\infty \times B\Sigma_\infty \to B\Sigma_\infty.$$

Однако это отображение не задает на $X = B\Sigma_\infty$ структуру H-пространства, поскольку отмеченная точка не является единицей. Но $B\Sigma_\infty$ и не может быть H-пространством, так как его фундаментальная группа Σ_∞ неабелева. Однако плюс-конструкция функториальна и сохраняет произведения. Поэтому мы получаем также отображение

$$(B\mu)^+\colon (B\Sigma_\infty)^+ \times (B\Sigma_\infty)^+ \to (B\Sigma_\infty)^+.$$

Можно убедиться, что ограничения отображения $(B\mu)^+$ на $(B\Sigma_\infty)^+ \times pt$ и $pt \times (B\Sigma_\infty)^+$ являются гомотопическими эквивалентностями. Поэтому даже если отображение $(B\mu)^+$ и не является H-структурой, его можно заменить умножением

$$\mu'\colon (B\Sigma_\infty)^+ \times (B\Sigma_\infty)^+ \to (B\Sigma_\infty)^+,$$

для которого отмеченная точка является настоящей единицей. Таким образом, действие группы $\pi_1((B\Sigma_\infty)^+)$ на $\pi_n((B\Sigma_\infty)^+)$ тривиально.

Случай $X = BGL(\infty, R)$ аналогичен. Можно построить гомоморфизм

$$\mu\colon GL(\infty, R) \times GL(\infty, R) \to GL(\infty, R),$$

заставляя первую матрицу действовать на базисных векторах с нечетными номерами, а вторую матрицу – на базисных векторах с четными номерами. Далее рассуждение такое же, как выше.

Абсолютно ясно, как аксиоматизировать эту ситуацию. Аксиомы должны состоять в том, что $X = BG_\infty$, где $G_\infty = \bigcup_n G_n$ и группы G_n составляют пермутативную категорию. Тогда пространство X^+ можно охарактеризовать следующими свойствами:

(i) $i_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(X^+)$ – эпиморфизм с ядром π;

(iii) действие $\pi_1(X^+)$ на $\pi_n(X^+)$ тривиально при всех n;

(iv) $i_*\colon H_*(X) \to H_*(X^+)$ – изоморфизм (с постоянными коэффициентами $\mathbb{Z}$).

Теперь я перейду ко второй теме. В § 2.3 я пообещал читателю одну вещь, а именно описать соотношение между пространствами M и ΩBM, где M - топологический моноид, не обязательно связный. Конечно, имеется отображение $M \to \Omega BM$, и нам хотелось бы описать гомологическое поведение этого отображения. Типичная ситуация состоит в том, что оно не индуцирует изоморфизм на группах гомологий отдельной компоненты моноида M, но изоморфизм получится, если перейти к пределу по компонентам моноида M. Мы дадим сейчас некоторые общие определения, а затем перейдем к примерам.

Если X есть H-пространство, то умножение в нем задает умножение в $\pi_0(X)$. Назовем пространство X <u>группоподобным</u>, если это умножение превращает $\pi_0(X)$ в группу. Например, любое пространство петель группоподобно, поскольку $\pi_0(\Omega Y) \cong \pi_1(Y)$. Нам не хотелось бы требовать группоподобности рассматриваемых нами моноидов M. Ведь в наших примерах

(a) $$M = \coprod_{n \geq 0} B\Sigma_n,$$

(b) $$M = \coprod_{n \geq 0} BGL(n, R)$$

$\pi_0(M)$ есть моноид $\{0, 1, 2, \ldots\}$ с обычным сложением. Но лучше и не ограничиваться этим специальным моноидом, поскольку могут потребоваться другие приложения. Например, в контексте алгебраической K-теории мы имеем дело с категорией конечно порожденных проективных R-модулей и их изоморфизмов, и в этом случае $\pi_0(M)$ есть моноид Гротендика классов изоморфных конечно порожденных проективных R-модулей (относительно сложения).

Обозначим через α типичный элемент моноида $\pi_0(M)$ и через M_α соответствующую связную компоненту моноида M; в частности, в примерах (a) и (b) M_n есть $B\Sigma_n$ или $BGL(n,R)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Построим теперь BM, классифицирующее пространство моноида M, и пространство петель ΩBM пространства BM. Имеется отображение

$$i: M \to \Omega BM,$$

причем оно согласовано со структурой H-пространств. Легко описать его воздействие на π_0: группа $\pi_0(\Omega BM)$ является универ-

альной группой, ассоциированной с моноидом $\pi_0(M)$, а

$$i_*: \pi_0(M) \to \pi_0(\Omega BM)$$

есть универсальное отображение.

В приведенных примерах (a) и (b) $\pi_0(M)=\{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\pi_0(\Omega BM)=\mathbb{Z}$. Однако, если мы имеем дело с категорией C конечно порожденных проективных R-модулей и их изоморфизмов, то мы получим

$$\pi_0(\Omega BM) = K_0(R).$$

Так как ΩBM - группоподобное H-пространство, все его связные компоненты гомотопически эквивалентны. Поэтому

$$\Omega BM \cong \pi_0(\Omega BM) \times (\Omega BM)_0.$$

Однако связные компоненты моноида M не обязательно гомотопически эквивалентны. В приведенных выше примерах (a) и (b)

$$M_n = B\Sigma_n, \quad M_n = BGL(n, R).$$

Очевидно, что в этих примерах нас интересует предел пространств M_n при $n \to \infty$, т.е. $B\Sigma_\infty$ или $BGL(\infty, R)$.

ТЕОРЕМА 3.2.1 (теорема о групповом пополнении [21, 27, 93, 94, 101, 120, 127]). <u>При соответствующих предположениях</u>

$$\varinjlim_{\alpha\in\pi_0(M)} H_*(M_\alpha) \to H_*((\Omega BM)_0)$$

<u>есть изоморфизм; эквивалентная формулировка:</u>

$$\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)] \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_0(M)]} H_*(M) \to H_*(\Omega BM)$$

<u>есть изоморфизм.</u>

Прежде чем объяснять предположения и заключение этой теоремы, я хотел бы привести пример ее использования.

СЛЕДСТВИЕ 3.2.2. <u>В рассмотренных выше двух примерах</u>

$$M_n = B\Sigma_n \ \underline{\text{и}} \ M_n = BGL(n, R)$$

<u>выполнены соотношения</u>

$$(\Omega BM)_0 = (B\Sigma_\infty)^+, \quad (\Omega BM)_0 = (BGL(\infty, R))^+.$$

С более общей точки зрения можно сказать, что эта теорема доказывает согласованность обоих подходов к построению высших K-групп $K_i(R)$. Первый подход - это подход Квиллена через

плюс-конструкцию; в этом случае определение таково: $K_i(R) = \pi_i((BGL(\infty, R))^+)$. При втором подходе категория конечно порожденных R-модулей помещается в некоторую машину; на выходе получается Ω-спектр с нулевым членом ΩBM, и группы $K_i(R)$ возникают как гомотопические группы этого спектра. Плюс-конструкция намного элементарнее, но она определяет только гомотопический тип и ничего более; нулевой же член Ω-спектра получается с намного более богатой структурой.

Н а б р о с о к д о к а з а т е л ь с т в а следствия 3.2.2. Пусть M_∞ есть $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$, т.е. в рассматриваемых случаях $B\Sigma_\infty$ или $BGL(\infty, R)$. Легко построить отображение этого пространства в $(\Omega BM)_0$, и, согласно нашей теореме, это отображение индуцирует изоморфизм в гомологиях. Так как $(\Omega BM)_0$ есть H-пространство, то

$$\pi_1((\Omega BM)_0) = H_1((\Omega BM)_0) \cong H_1(M_\infty) \cong$$

$$\cong \pi_1(M_\infty)/[\pi_1(M_\infty), \pi_1(M_\infty)].$$

Следовательно, выполнено наложенное выше условие на фундаментальную группу. Поэтому ясно, что пространство $(\Omega BM)_0$ удовлетворяет условиям (i), (iii) и (iv), характеризующим X^+, для $X = M_\infty$.

С некоторой точки зрения кажется соблазнительным попытаться усилить теорему о групповом пополнении, распространив ее заключение на когомологии с локальными коэффициентами. Тогда можно было бы для $(\Omega BM)_0$ ограничиться проверкой условий (i) и (ii). Но без этого можно обойтись, и я не вижу особых преимуществ в таком усилении.

Теперь поясним формулировку и предположения нашей теоремы. Вторая часть утверждения поясняет сама себя. Как $\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)]$, так и $H_*(M)$ отображаются в группу $H_*(\Omega BM)$, которая является кольцом по отношению к умножению Понтрягина, а отображение

$$\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)] \otimes H_*(M) \to H_*(\Omega BM)$$

билинейно над $\mathbb{Z}[\pi_0(M)]$ [1)].

---

1) То есть $x \otimes \alpha y \longmapsto x\alpha \otimes y$ при $x \in \mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)]$, $y \in H_*(M)$, $\alpha \in \mathbb{Z}[\pi_0(M)]$. – Прим. перев.

Осталось объяснить, в каком смысле понимается предел в первой части утверждения. Левый перенос, т.е. умножение слева на $\alpha \in \pi_0(M)$, задает отображение

$$H_*(M_\beta) \to H_*(M_{\alpha\beta}).$$

Имеется диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_*(M_\beta) & \longrightarrow & H_*((\Omega BM)_{i_*\beta}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(M_{\alpha\beta}) & \longrightarrow & H_*((\Omega BM)_{i_*\alpha\beta}) \end{array}$$

Поэтому, если в этой системе диаграмм можно перейти к пределу, мы получим отображение

$$\varinjlim_\beta H_*(M_\beta) \to \varinjlim_\beta H_*((\Omega BM)_{i_*\beta}).$$

Но справа стоит предел по изоморфизмам, поэтому отображение из $H_*((\Omega BM)_0)$ в предел также является изоморфизмом.

Теперь попробуем указать достаточные условия согласованности системы с пределами. Мы сделаем следующие допущения.

(i) Для любых α, β из $\pi_0(M)$ существуют γ, δ из $\pi_0(M)$, такие, что

$$\gamma\alpha = \delta\beta.$$

(ii) Если в $\pi_0(M)$ выполняется равенство

$$\alpha\gamma = \beta\gamma,$$

то для некоторого δ из $\pi_0(M)$

$$\delta\alpha = \delta\beta.$$

Оба предположения тривиальны, если моноид $\pi_0(M)$ коммутативен: в (i) можно положить $\gamma = \beta$, $\delta = \alpha$, а в (ii) $\delta = \gamma$. Но в наших примерах (a) и (b), а также во всех аналогичных приложениях умножение $\mu: M \times M \to M$ на самом деле гомотопически коммутативно. (Оба примера возникают из подходящих категорий. При доказательстве гомотопической коммутативности используется естественный изоморфизм c: $\square \cong \square\tau$, но не его когерентность.) Поэтому мы можем безбоязненно делать любое предположение, более слабое, чем условие гомотопической коммутативности, в частности предположение о коммутативности моноида $\pi_0(M)$.

Впрочем, условия (i) и (ii) могут выполняться и в отсутствие коммутативности $\pi_0(M)$.

Из этих предположений вытекает, что $\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)]$ является плоским $\mathbb{Z}[\pi_0(M)]$-модулем. Например, в случае, когда $\pi_0(M) = \{0, 1, 2, \ldots\}$, последнее утверждение означает, что кольцо конечных рядов Лорана $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ является плоским модулем над кольцом многочленов $\mathbb{Z}[t]$. Объяснение в общем случае такое же, как и в этом частном случае: $\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)]$ есть прямой предел свободных модулей. Из этих условий вытекает и изоморфизм

$$\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)] \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_0(M)]} H_*(M) \cong \mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)] \otimes_{\mathbb{Z}} \varinjlim_{\alpha} H_*(M_\alpha),$$

поэтому обе формулировки теоремы эквивалентны.

Нам потребуется также следующее. Пусть $\gamma \in \pi_0(M)$. Тогда правый сдвиг на γ перестановочен со всеми отображениями индуктивной системы, и, следовательно, этот сдвиг задает отображение

$$\varinjlim_{\alpha} H_*(M_\alpha) \to \varinjlim_{\alpha} H_*(M_\alpha).$$

Мне хотелось бы, чтобы это отображение было изоморфизмом при всех $\gamma \in \pi_0(M)$. Это, конечно, так, если моноид M гомотопически коммутативен, поскольку в этом случае правый сдвиг на γ гомотопен левому сдвигу на γ. Это условие также и необходимо, поскольку правый сдвиг на $i_*\gamma$, разумеется, задает изоморфизм

$$H_*(\Omega BM) \to H_*(\Omega BM).$$

При таких предположениях можно дать следующий набросок доказательства теоремы. Справа мы имеем расслоение

$$\Omega BM \to EBM \to BM,$$

и для этого расслоения определена классическая спектральная последовательность Серра. Пространство петель ΩBM действует слева на EBM, и потому эта спектральная последовательность является спектральной последовательностью левых модулей над $H_*(\Omega BM)$. Ясно также, что эта спектральная последовательность имеет вид

$$H_*(BM; S) \Rightarrow H_*(pt),$$

где S – система локальных коэффициентов, над каждой точкой изоморфных $H_*(\Omega BM)$.

Слева мы имеем конструкцию

$$M \to EM \to BM,$$

12-1

причем моноид M действует на EM послойно по отношению к проекции в BM. Эта конструкция не является расслоением ни в каком из обычных смыслов. Тем не менее имеется спектральная последовательность

$$H_*(BM; S') \Rightarrow H_*(pt).$$

Здесь S' - система коэффициентов, которая даже не локальна, поскольку граничные гомоморфизмы, возникающие на гранях симплексов из BM, не являются изоморфизмами. Однако коэффициенты в каждой точке изоморфны кольцу $H_*(M)$. Более того, эта спектральная последовательность состоит из левых модулей над $H_*(M)$.

Я не сомневаюсь, что всякий, кто владеет соответствующей техникой, без труда сможет определить отображение из второй спектральной последовательности в первую, сравнивающее эти спектральные последовательности и являющееся отображением левых модулей над $H_*(M)$.

Локализуем теперь вторую спектральную последовательность посредством операции

$$\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)] \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_0(M)]}.$$

Этот функтор сохраняет точность, о чем уже говорилось, а поэтому мы снова получаем спектральную последовательность. Более того, новая спектральная последовательность по-прежнему отображается в первую спектральную последовательность. Но граничные отображения в системе коэффициентов S' задаются правыми сдвигами, поэтому при локализации они, согласно предположению, делаются изоморфизмами, и после локализации мы получаем уже локальную систему коэффициентов S'', которая в каждой точке есть

$$\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)] \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_0(M)]} H_*(M)$$

и которая отображается в S.

Теперь мы поворачиваем рукоятку теоремы сравнения спектральных последовательностей. Применяя индукцию, предположим, что

$$\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)] \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_0(M)]} H_*(M) \to H_*(\Omega BM)$$

есть изоморфизм в размерностях $<n$, так что и $S'' \to S$ - изоморфизм в размерностях $<n$. Тогда, очевидно, и

$$H_0(BM; S''_n) \to H_0(BM; S_n)$$

есть изоморфизм, т.е.

$$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)]}\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)]\otimes_{\mathbb{Z}[\pi_0(M)]}H_n(M)\to$$

$$\to\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[\pi_0(\Omega BM)]}H_n(\Omega BM)$$

есть изоморфизм, а потому и

$$\varinjlim_{\alpha} H_n(M_\alpha)\to H_n((\Omega BM)_0)$$

– изоморфизм. Следовательно, теорема верна и в размерности n. Набросок доказательства закончен.

Глава 4

ТРАНСФЕР

§ 4.1. Введение

Понятие трансфера тесно переплетается с вопросами, поднятыми в гл. 1. Дело в том, что трансфер позволяет определить в каждой из групп некоторой теории когомологий, например в

$$E^0(X) = [X \cup (pt), \Omega^\infty E],$$

дополнительную структуру, которая в общем случае в $[X \cup (pt), Y]$ отсутствует. Эта дополнительная структура отражает структуру бесконечнократного пространства петель на $\Omega^\infty E$.

Каждому, кто изучает алгебраическую топологию, можно рекомендовать хотя бы немного ознакомиться с понятием трансфера, поскольку упомянутая дополнительная структура является еще одним мощным средством для выполнения вычислений и доказательств. Нам она потребуется в гл. 5, содержащей применение трансфера; она также существенно используется в гл. 6. Эти причины побуждают меня посвятить трансферу отдельную короткую главу.

В настоящем § 4.1 я попытаюсь привести все основные идеи в квазиисторической последовательности. В § 4.2 я расскажу о связи между трансфером и структурными отображениями, подобными рассматривавшимся в гл. 2. В § 4.3 я упомяну о некоторых формальных свойствах трансфера, которые особенно важны для его применений; этот параграф заканчивается своего рода рабочим примером.

Наиболее известен трансфер в обычных гомологиях и когомологиях (см. также [159*] . - Перев.). Подход, который я намечу, восходит к Экману [56] . Пусть

$$p: X \to Y$$

есть n-листное накрытие, т.е. локально тривиальное расслоение, слоем которого является дискретное пространство из n точек; можно также понимать его как расслоение в смысле Стинрода, структурной группой которого является симметрическая группа Σ_n.

Для того чтобы определить трансфер

$$p^!: C_m(Y) \to C_m(X),$$

достаточно сказать, что это отображение линейно, и задать его на образующих. Если мы используем сингулярные цепи, то образующими комплекса $C_m(Y)$ служат сингулярные симплексы $f: \sigma^m \to Y$. Каждому сингулярному симплексу $f: \sigma^m \to Y$ соответствует равно n сингулярных симплексов $g: \sigma^m \to X$, для которых $pg = f$. Положим

$$p^! f = \sum g \mid pg = f,$$

т.е. $p^! f$ есть сумма сингулярных симплексов, лежащих над f.

Оказывается, что

$$p^! d = dp^!,$$

т.е. трансфер - цепное отображение. Действительно, если $d_i: \sigma^{m-1} \to \sigma^m$ - это операторы граней, а g пробегает множество всех сингулярных n-симплексов, для которых $pg = f$, то gd_i пробегает множество всех сингулярных n-симплексов $h: \sigma^{m-1} \to X$, для которых $ph = fd_i$.

Рассмотрим теперь подпространство B в Y и положим $A = p^{-1}B \subset X$. Тогда $p^!$ отображает $C_m(B)$ в $C_m(A)$. Получается цепное отображение

$$p^!: C_m(Y, B) \to C_m(X, A).$$

Вводя в качестве области коэффициентов абелеву группу Λ, мы получим цепное отображение

$$p^!: C_m(Y, B; \Lambda) \to C_m(X, A; \Lambda)$$

и коцепное отображение

$$p_!: C^m(Y, B; \Lambda) \leftarrow C^m(X, A; \Lambda).$$

Наконец, переходя к гомологиям и когомологиям, мы получим инду-

цированные гомоморфизмы

$$p^!: H_m(Y,B;\Lambda) \to H_m(X,A;\Lambda),$$

$$p_!: H^m(Y,B;\Lambda) \leftarrow H^m(X,A;\Lambda).$$

Отметим, что направления стрелок противоположны направлениям стрелок в обычных гомоморфизмах p_*, p^*, индуцированных проекцией

$$p: X,A \to Y,B.$$

Каждое из отображений $p^!$, $p_!$ называется <u>трансфером</u>. Если нет необходимости уточнять p, то можно пользоваться обозначением Tr. К формальным свойствам трансферов $p^!$ и $p_!$ мы обратимся позднее.

Не мешает привести типичный пример использования трансфера. Я приведу пример из теории когомологий групп. Пусть G - конечная группа и S - ее подгруппа. Рассмотрим классифицирующее пространство BG группы G, являющееся также пространством Эйленберга - Маклейна типа $(G, 1)$. Это пространство накрывается пространством BS. Накрытие n-листно, где $n = |G|/|S|$ - индекс подгруппы S в G. Имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H^*(BS;\Lambda) \arrow[dr, "Tr"] & \\ H^*(BG;\Lambda) \arrow[ur, "p^*"] \arrow[rr, "n"] & & H^*(BG;\Lambda) \end{tikzcd}$$

Мы видим, что если $n: \Lambda \to \Lambda$ - изоморфизм, то

$$p^*: H^*(BG;\Lambda) \to H^*(BS;\Lambda)$$

- мономорфизм на прямое слагаемое. В гл. 12 книги [51] можно найти упоминание о ранней работе Дж. Тейта на эту тему.

Следующая идея состоит в том, что трансфер можно определить не только в обычных теориях когомологий. В 1961 г. такое построение в комплексной K-теории провел Атья (см. [17], с. 26). Пусть $p: X \to Y$ - конечнолистное накрытие. Предположим (для простоты), что X и Y конечномерны. Пусть ξ - комплексное векторное расслоение над X. Комплексное векторное расслоение $p_!\xi$ над Y можно построить следующим образом. В качестве слоя

$(p_!\xi)_y$ в точке $y\in Y$ мы возьмем

$$(p_!\xi)_y = \bigoplus_{px=y} \xi_x .$$

Эти слои очевидным образом составляют векторное расслоение. Поскольку $p_!$ сохраняет сложение, мы получаем гомоморфизм

$$p_!: K(X) \to K(Y).$$

Это и есть трансфер Атьи.

Комплексная K-теория подтверждает, что для обобщенных теорий когомологий равенства $\mathrm{Tr}\, p^* = n$ как формального свойства трансферов может и не быть. Действительно, возьмем в качестве $p: X \to Y$ универсальное n-листное накрытие над $B\Sigma_n$. Проверим формулу на элементе 1, тривиальном линейном расслоении над $Y = B\Sigma_n$. Тогда $\mathrm{Tr}\, p^*1$ не есть тривиальное n-мерное расслоение. (Напротив, это расслоение соответствует представлению, при котором Σ_n действует на $\mathbb{C}^n$ посредством перестановок координат.)

Оказывается, однако, что отсутствие равенства $\mathrm{Tr}\, p^* = n$ делает теорию более, а не менее интересной.

Вообще можно сказать, что явное геометрическое определение обобщенной теории когомологий часто позволяет дать явное *ad hoc* геометрическое определение трансфера. Такие определения *ad hoc* очень удобны для вычислений и помогут многое прояснить. Однако, если у нас есть также и некоторая общая теория трансферов, то, конечно, нужно доказывать, что наши определения *ad hoc* согласуются с общими определениями, а такие доказательства могут быть основаны только на деталях каждого частного случая. В случае трансфера Атьи см. [74], предложение 2.4, с. 984.

Первая известная мне работа, посвященная общей теории трансфера, - это работа Бордмана 1966 г. В [35], гл. V, § 6, он определяет восемь "прямых" гомоморфизмов, или гомоморфизмов Гизина, которые он называет трансферами. Из них нам наиболее подходит гомоморфизм (d) (правда, Бордман склонен предполагать, что X и Y - многообразия). Вероятно, в этом источнике стоило бы еще покопаться.

Далее следует упомянуть неопубликованную диссертацию Роуша (1971 г.) [122]. Роуш констатирует, что некоторые из его результатов получены независимо Квилленом. В его работе мы находим важное геометрическое наблюдение. Пусть $p: X \to Y$ - локально тривиальное расслоение с конечными слоями; не обязательно предполагать, что все они состоят из одного и того же числа элемен-

тов, если Y несвязно. Будем для удобства считать, что Y есть CW-комплекс, и наделим X соответствующей CW-структурой. Пусть B – подкомплекс в Y и, как и выше, $A = p^{-1}B$.

КОНСТРУКЦИЯ 4.1.1. Эти данные определяют отображение спектров

$$p^!: \Sigma^\infty(Y/B) \to \Sigma^\infty(X/A).$$

Отметим, что здесь переход $(X,A) \mapsto X/A$ следует понимать как функтор из категории пар в категорию пространств с отмеченной точкой: подпространство A отождествляется в новую точку, которая и считается отмеченной; в частности, в случае пустого A получаем $X/\emptyset = X \cup (pt)$.

Очевидно, что такое отображение $p^!$ позволяет получить трансферы сразу во всех обобщенных теориях когомологий. Действительно, для обобщенной теории когомологий E^*, соответствующей спектру $\mathbf{E}$, получается отображение

$$\begin{tikzcd} E^0(X,A) = [\Sigma^\infty(X/A), \mathbf{E}] \arrow[d, "(p^!)^*"] \\ E^0(Y,B) = [\Sigma^\infty(Y/B), \mathbf{E}] \end{tikzcd}$$

Имеет место аналогичное отображение с $E^n(\ )$ вместо $E^0(\ )$.

Этот трансфер естествен относительно отображений $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$; иными словами, если $f: \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ – отображение спектров, то коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} {[\Sigma^\infty(X/A), \mathbf{E}]} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "(p^!)^*"'] & {[\Sigma^\infty(X/A), \mathbf{F}]} \arrow[d, "(p^!)^*"] \\ {[\Sigma^\infty(Y/B), \mathbf{E}]} \arrow[r, "f_*"] & {[\Sigma^\infty(Y/B), \mathbf{F}]} \end{tikzcd}$$

Наоборот, если мы хотим определить трансфер сразу для всех обобщенных теорий когомологий, естественный в указанном смысле, то единственная надежда – на отображение

$$p^!: \Sigma^\infty(Y/B) \to \Sigma^\infty(X/A)$$

(как это видно из леммы Йонеды или из подстановки $\mathbf{E} = \Sigma^\infty(X/A)$).

Геометрическая идея конструкции 4.1.1 достаточно проста и прозрачна. Вначале предположим, что X и Y конечномерны, скажем, их размерность $\leqslant d$. Построим произведение $Y\times I^n$ пространства Y на стандартный n-мерный куб. При достаточно большом n накрытие $p: X \to Y$ допускает вложение в проекцию

$$Y\times(\mathrm{Int}\, I^n) \xrightarrow{\pi_1} Y.$$

Иначе говоря, можно построить коммутативную диаграмму, в которой e вкладывает X в $Y\times(\mathrm{Int}\, I^n)$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "p"'] & & Y\times I^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Для этого необходимо иметь достаточно места, чтобы раздвинуть слои накрытия; можно взять $n > d$. Далее построим <u>кубчатую окрестность</u> (кубическую трубчатую окрестность) подпространства X в $Y\times I^n$. Иными словами, мы строим коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e'"] \arrow[dr, "p"'] & X\times I^n \arrow[r, "e''"] \arrow[d, "p\pi_1"] & Y\times I^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Здесь e' есть вложение пространства X в $X\times I^n$, построенное по центру куба I^n, а отображение e'' для каждой точки $y\in Y$ осуществляет вложение конечного числа непересекающихся маленьких кубиков в I^n. Каждый из этих маленьких кубиков $x\times I^n$ вкладывается по формуле

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (m_1x_1+c_1, m_2x_2+c_2, \dots, m_nx_n+c_n)$$

(см. гл. 2).

Конечно, если вы предпочитаете строить вложение e'' пространства $X\times I^n$ прямо, не используя строительных лесов в виде вложения e пространства X, это только лучше, ибо все, что нам нужно,— это вложение e''.

При всех обстоятельствах, стягивая в точку дополнение кубчатой окрестности, а также подпространство $B\times I^n$, мы получим ото-

бражение

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{Y\times I^n}{Y\times \dot I^{n-1}\cup B\times I^n} \arrow[r, "p^!"] \arrow[d, leftrightarrow, "="'] & \dfrac{X\times I^n}{X\times \dot I^{n-1}\cup A\times I^n} \arrow[d, leftrightarrow, "="] \\
\Sigma^n(Y/B) & \Sigma^n(X/A)
\end{tikzcd}$$

Это и есть нужное нам отображение.

По своей форме наша конструкция включает в себя произвольный выбор, и необходимо доказать, что ее результат от этого выбора не зависит. Предположим, что конструкция проделана дважды, с выбором n_0 и n_1 в качестве n, с выбором e_0 и e_1 в качестве e и т.д. Увеличим n_0 и n_1 до некоторого общего значения n, и это n возьмем настолько большим, насколько потребуется. Увеличивая куб I^{n_0} до куба I^n и отводя координатам $x_{n_0+1},\ldots,x_n$ пассивную роль в конструкции, мы заменяем $p_0^!$ надстройкой $\Sigma^{n-n_0}p_0^!$. Аналогично поступим с отображением $p_1^!$. Теперь нетрудно построить диаграмму

$$\begin{tikzcd}
I\times X \arrow[r, "e'"] \arrow[dr, "1\times p"'] & I\times X\times I^n \arrow[r, "e''"] \arrow[d, "1\times p\pi_1"] & I\times Y\times I^n \arrow[dl, "1\times\pi_1"] \\
& I\times Y &
\end{tikzcd}$$

которая согласуется с данными диаграммами на концах $t=0$ и $t=1$ интервала времени I. Таким образом, получается отображение

$$\frac{I\times\Sigma^n(Y/B)}{I\times pt}\longrightarrow\frac{I\times\Sigma^n(X/A)}{I\times pt},$$

которое и дает нужную гомотопию.

Наконец, если X и Y – бесконечномерные комплексы, мы должны будем проводить построение по остовам X^d и Y^d; при увеличении d мы будем соответственно увеличивать n, причем необходимо позаботиться, чтобы то, что мы построим для $d+1$, было согласовано с тем, что мы построили для d. Именно здесь нам потребуется предельный переход, а для него необходимы спектры $\Sigma^\infty(X/A)$ и $\Sigma^\infty(Y/B)$.

Читатель может самостоятельно удостовериться в том, что применяя обычные гомологии или когомологии к отображению

$$p^!: \Sigma^\infty(Y/B) \to \Sigma^\infty(X/A)$$

из конструкции 4.1.1, он получит результат, согласованный с классической конструкцией Экмана, с которой мы начали наш рассказ. (Нужно заменить сингулярные симплексы клетками, или см. [74], предложение 2.1, с. 983.)

Теория Роуша позволяет также установить связь между трансфером и структурными отображениями типа,рассмотренного в гл. 2. Мы поговорим об этом в § 4.2.

Очевидно, что отображения $p^!$ из конструкции 4.1.1 должны иметь хорошие формальные свойства. Сейчас мы отложим это, и вспомним о них в § 4.3.

Теперь я вставлю замечание, относящееся к нашей основной теме. Мы видим, что для того, чтобы контравариантный функтор $k(X)$ мог быть нулевым членом теории когомологий, нужно, чтобы существовали трансферы

$$p_!: k(X) \to k(Y)$$

для всех конечнолистных накрытий $p: X \to Y$; несомненно, при желании можно указать явные аксиомы, которым подчиняются эти трансферы. Одно время была даже гипотеза (см. [141], с. 50), что существование трансфера является достаточным условием. Иначе говоря, любой представимый функтор со значениями в категории групп, оснащенный трансферами, которые удовлетворяют надлежащим условиям, является нулевым членом некоторой теории когомологий. Однако теперь известно, что это не так; контрпример к этой гипотезе анонсировал Крэйнес (D. Kraines) на конференции в Эванстоне в 1977 г. (см. [165*]. - Перев.).

Таким образом, мы видим, что в проблемах, касающихся бесконечнократных пространств петель, условия, доставляемые трансфером, необходимы, но, вообще говоря, не достаточны. Однако остается возможность, что эти условия окажутся достаточными в интересующих нас случаях. Мы еще вернемся к этому в гл. 6.

Внимание топологов к трансферу привлекла хорошо известная работа Кана и Придди [74], появившаяся в 1972 г. Кан и Придди писали там: "... существование трансфера кажется хорошо известным фактом, но нам неизвестна ни одна публикация на этот счет".Так

топологический мир узнал, что все хорошо информированные специалисты должны были бы знать о трансфере, хотя в действительности о нем знали лишь те, кому очень повезло.

Вероятно, стоит сформулировать полученный Каном и Придди результат, поскольку быстрое распространение всеобщей убежденности в достоинствах трансфера во многом обязано решению ими одной из важных проблем теории гомотопий.

Рассмотрим

$$\Omega^\infty \Sigma^\infty S^0 = \lim_{n\to\infty} \Omega^n S^n.$$

Возьмем одну из компонент этого пространства, скажем $(\Omega^\infty\Sigma^\infty S^0)^0$. Локализуем ее по двойке; получим, скажем, $(\Omega^\infty\Sigma^\infty S^0)^0_{(2)}$. Оказывается, что это пространство является прямым сомножителем пространства $\Omega^\infty\Sigma^\infty \mathbb{R}P^\infty$. Более точно,

$$\Omega^\infty\Sigma^\infty \mathbb{R}P^\infty = (\Omega^\infty\Sigma^\infty S^0)^0_{(2)} \times (?),$$

где $\times$ - знак прямого произведения, а (?) - неизвестный множитель. В частности, стабильные гомотопические группы пространства $\mathbb{R}P^\infty$ эпиморфно отображаются на 2-примарные компоненты стабильных гомотопических групп сфер в положительных размерностях, и ядро этого эпиморфизма - прямое слагаемое. Этот эпиморфизм индуцирован хорошо известным отображением спектров. Однако встречный мономорфизм, задающий расщепление, не может индуцироваться никаким отображением спектров; он может индуцироваться только отображением пространств. Поэтому этот результат интересен и с методологической точки зрения, поскольку использование "нестабильной" геометрии оказывается существенным для доказательства "стабильного" результата.

Имеется аналогичный результат и для простых $p \neq 2$. Можно заменить $\mathbb{R}P^\infty$ пространством $B\mathbb{Z}_p$, однако это неоправданно большое пространство. Можно заменить $\mathbb{R}P^\infty$ пространством $B\Sigma_p$, но оно не p-примарно. По-видимому, лучше всего использовать пространство $(B\Sigma_p)^+_{(p)}$.

Следующая работа, о которой пойдет речь,- это работа Беккера и Готтлиба 1975 г. [33]. Беккер и Готтлиб имели дело с расслоениями, более общими, чем накрытия, а именно исследовали случай расслоения $p: E \to B$, у которого слоем F является компактное гладкое многообразие, структурной группой - компактная группа

Ли G, гладко действующая на F, и базой B – конечный комплекс. Эта ситуация поразительно напоминает трансфер Бордмана (h) (см. [35], с. 45–48). Далее Беккер и Готтлиб строят отображение

$$p^!: \Sigma^\infty(B/\phi) \to \Sigma^\infty(E/\phi),$$

которое можно использовать для построения трансферов. Заметим, что эти трансферы сохраняют степени, т.е. они определяют отображения

$$(p^!)^*: H^n(E) \to H^n(B).$$

В этом смысле они ведут себя как гомоморфизмы Гизина. На самом деле в обычных когомологиях конструкция Беккера – Готтлиба приводит к результатам, которые можно объяснить в ранее известных терминах. Для этого мне нужно кое-что напомнить. Пусть F – многообразие размерности d. Рассматривая члены $E^{p,q}$ спектральной последовательности расслоения с $q = d$, мы получаем отображение

$$H^n(E) \to H^{n-d}(B; H^d(F));$$

используя фундаментальный класс слоя, мы можем превратить его в отображение

$$H^n(E) \to H^{n-d}(B).$$

Это отображение называется интегрированием по слоям (см. [41]), поскольку это название оправдано в частном случае когомологий де Рама. Тогда в обычных когомологиях конструкция Беккера – Готтлиба дает композицию (i) умножения на эйлеров класс касательного расслоения вдоль слоев и (ii) интегрирования по слоям.

Этот результат позволил Беккеру и Готтлибу перенести на группы Ли все результаты и методы, которые ранее применялись только к конечным группам. Рассмотрим пример, смоделированный на результате, полученном выше для конечных групп.

ПРЕДТЕОРЕМА 4.1.2. Пусть G – компактная связная группа Ли, N – нормализатор максимального тора в G, а E^* – произвольная обобщенная теория когомологий. Тогда отображение

$$E^*(BG) \to E^*(BN)$$

(индуцированное вложением N в G) является мономорфизмом на прямое слагаемое.

Набросок доказательства. Рассмотрим расслоение

$$G/N \longrightarrow BN \xrightarrow{p} BG.$$

В этом расслоении G/N является компактным гладким многообразием, как нам и нужно; при этом характеристика Эйлера - Пуанкаре $\chi(G/N)$ равна 1. В обычных когомологиях этого было бы достаточно, чтобы композиция

$$H^*(BG) \xrightarrow{p^*} H^*(BN) \xrightarrow{Tr} H^*(BG)$$

равнялась 1. В обобщенных когомологиях мы не можем доказать, что эта композиция есть 1. Однако она индуцируется отображением спектров, скажем

$$f: \Sigma^\infty(BG/\phi) \longrightarrow \Sigma^\infty(BG/\phi),$$

индуцирующим тождественное отображение в обычных гомологиях и когомологиях; следовательно, f является гомотопической эквивалентностью, что и дает нужное расщепление.

Теперь мне нужно пояснить, почему я назвал 4.1.2 предтеоремой. Приведенный набросок доказательства неполон, поскольку, как я сказал, Беккер и Готтлиб предпочитают строить трансфер только в случае, когда базой расслоения является конечный комплекс, а пространство BG не является конечным комплексом. Поэтому Беккер и Готтлиб не сформулировали свой результат в форме 4.1.2, а ограничились аналогом утверждения 4.1.2 для конечных комплексов. В действительности все наиболее важные следствия утверждения 4.1.2 можно вывести и из результата Беккера и Готтлиба, ибо в каждом случае можно привести технические аргументы, позволяющие ограничиться конечными комплексами. В некоторых случаях такие технические аргументы известны независимо от наших проблем (например, если BG должно аппроксимировать BU или BO), и тогда они не столь обременительны.

Однако удобнее всего продумывать результаты, если они представлены в наиболее простой и общей форме; и с этой позиции можно предпочесть другой подход. В приведенном наброске доказательства говорится об отображении спектров; Беккер и Готтлиб, однако, предпочитают не пользоваться спектрами. Кажется даже правдоподобным, что они предполагают базу конечной главным образом для

того, чтобы обойтись без спектров. Вероятно, при помощи спектров от этого ограничения удастся избавиться. И было бы желательно сделать это[1]. Если это так, то утверждение 4.1.2 является настоящей теоремой, доказываемой по приведенной схеме.

Во всяком случае, мы заключаем, что в принципе трансфер Беккера - Готтлиба позволяет получать результаты о группах Ли, сравнимые с теми, которые классический трансфер дает для конечных групп.

В дальнейшем трансфер Беккера - Готтлиба был обобщен, а необходимые условия для его существования ослаблены [31].

Хорошее краткое изложение трансфера Беккера - Готтлиба и его приложений имеется в [79].

§ 4.2. Трансфер и структурные отображения

В этом параграфе мы вначале установим связь трансфера с введенными в гл. 2 структурными отображениями. Затем мы сопоставим это с подходом, описанным в § 4.1, точнее с конструкцией 4.1.1. Наконец, в заключение мы посмотрим, как некоторые хорошие свойства трансфера соответствуют хорошим свойствам структурных отображений.

Первая наша цель - установить взаимно однозначное соответствие между трансферами и гомотопическими классами структурных отображений. Конечно, сначала необходимо все это определить.

Трансфер - это то, что ставит в соответствие каждому n-листному накрытию $p: X \to A$ некоторую функцию

$$p_!: [X, V] \to [A, W].$$

Это n должно быть зафиксировано: все рассматриваемые трансферы определены для n-листных накрытий. Пространства V и W также зафиксированы. Мы рассматриваем $[\ , V]$ как аналог одной теории когомологий (или, вернее, одной группы когомологий), а $[\ , W]$ - как аналог другой теории. $[X, V]$ - множество гомотопических классов отображений из X в V, где ни отображения, ни гомотопии не обязаны сохранять отмеченные точки. То же относится и к $[A, W]$. (Мы выбрали такой подход, поскольку нам желательно применить функтор $[\ , V]$ непосредственно к нашему накрывающему

[1] Это сделано. См. [160*]. - Прим.перев.

пространству X, а не к $X \cup (pt)$.) Введение пространств V и W, которые могут и не совпадать, – не просто ненужное обобщение; как окажется позднее, на то есть веские причины. Что же касается пространств X и A, мы отступили от обозначений § 4.1, поскольку в этом параграфе мы вынуждены ограничиться абсолютным случаем и не касаться относительного.

Функции $p_!$ должны удовлетворять одной аксиоме, а именно аксиоме естественности. Чтобы сформулировать ее, нужно определить отображения. <u>Отображением</u> одного n-листного накрытия в другое называется декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

в котором ξ взаимно однозначно отображает каждый слой накрытия p на слой накрытия q. Мы требуем, чтобы для каждого такого отображения была коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} {[X, V]} \arrow[d, "p_!"'] & {[Y, V]} \arrow[l, "\xi^*"'] \arrow[d, "q_!"] \\ {[A, W]} & {[B, W]} \arrow[l, "\alpha^*"'] \end{tikzcd}$$

Это завершает наше определение трансфера.

Структурным отображением должно быть некоторое отображение

$$\theta\colon (E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \to W.$$

Я прошу прощения за чрезмерные подробности, однако все это мне понадобится. Группа Σ_n – это группа перестановок n элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пространство $E\Sigma_n$ есть тотальное пространство универсального Σ_n-расслоения; таким образом, оно стягиваемо, и группа Σ_n свободно действует на нем справа. Группа Σ_n действует справа и на декартовом произведении V^n, как указывалось в § 1.3. Правое действие группы Σ_n на произведении $E\Sigma_n \times V^n$ задается действием на сомножителях. Она также действует тривиально слева на (pt). Произведение $X \times_G Y$ над группой G определяется как факторпространство произведения $X \times Y$ по

отношению эквивалентности

$$(xg, y) \simeq (x, gy).$$

С первого взгляда кажется, что $X \times_G (pt)$ является излишне усложненным обозначением пространства X/G; пока это действительно так, но в дальнейшем мы захотим связать это пространство с другими пространствами вида $X \times_G Y$, где действие G в Y уже не будет нетривиальным.

Сделанный нами выбор деталей диктуется соображениями удобства в этом параграфе, но он легко может быть согласован с подходами других авторов (или автора настоящей книги в другом месте этой книги). Например, можно заменить правое действие левым по правилу $gy = yg^{-1}$. Используя это замечание соответствующим образом, мы можем заменить пространство

$$(E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt)$$

пространствами

$$E\Sigma_n \times_{\Sigma_n} V^n, \quad V^n \times_{\Sigma_n} E\Sigma_n$$

или другим нужным нам пространством.

Это завершает наш рассказ о структурных отображениях. Структурные отображения классифицируются относительно гомотопии, при которой ни отображения, ни гомотопии не обязаны сохранять отмеченные точки.

Для нас недостаточно простой констатации существования взаимно однозначного соответствия между трансферами и структурными отображениями; нам нужно еще знать, как устроено это взаимно однозначное соответствие. В частности, мы должны уметь по заданному структурному отображению θ строить соответствующий трансфер.

Чтобы объяснить это надлежащим образом, напомню, как построить главное расслоение, ассоциированное с n-листным накрытием $p: X \to A$. Определим подмножество $\overline{X} \subset X^n$ как множество функций

$$\underline{x}: \{1, 2, \ldots, n\} \to X,$$

задающих взаимно однозначное соответствие множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с некоторым слоем накрытия p. Группа Σ_n действует справа на $\overline{X}$, и имеется очевидное отождествление

$$\overline{X} \times_{\Sigma_n} (pt) \cong A.$$

Предположим теперь, что заданы структурное отображение

$$\theta\colon (E\Sigma_n \times V^n)\times_{\Sigma_n}(pt) \to W,$$

n-листное накрытие $p\colon X \to A$ и отображение $u\colon X \to V$. Поскольку $E\Sigma_n$ универсально, можно построить Σ_n-отображение

$$\lambda\colon \bar{X} \to E\Sigma_n.$$

Можно далее построить Σ_n-отображение

$$\mu\colon \bar{X} \to V^n$$

как композицию

$$\bar{X} \xrightarrow{i} X^n \xrightarrow{u^n} V^n,$$

где i - вложение. Наконец, отображения λ и μ составляют Σ_n-отображение

$$\bar{X} \xrightarrow{(\lambda,\mu)} E\Sigma_n \times V^n.$$

Мы определяем $p_! u$ как композицию

$$A \cong \bar{X}\times_{\Sigma_n}(pt) \xrightarrow{(\lambda,\mu)\times_{\Sigma_n}1} (E\Sigma_n\times V^n)\times_{\Sigma_n}(pt) \xrightarrow{\theta} W.$$

Осталось лишь проверить, что функция

$$p_!\colon [X,V] \to [A,W]$$

корректно определена. Это нетрудно. Любые два отображения λ Σ_n-гомотопны, поскольку $E\Sigma_n$ универсально; аналогично, при замене отображения u гомотопным отображением отображение μ заменяется Σ_n-гомотопным отображением. Таким образом, $(\lambda,\mu)\times_{\Sigma_n}1$ остается в том же гомотопическом классе. Это завершает построение трансфера $p_!$ по структурному отображению θ.

Некоторые авторы, вероятно, полагают, что это построение трансфера $p_!$ требует выбора представителей классов смежности. Если кто-нибудь все еще думает, что представители классов смежности позволяют обнажить отображение

$$\bar{X} \xrightarrow{i} X^n \xrightarrow{u^n} V^n$$

во всей ослепляющей простоте, я мог бы высказать некоторое суждение по поводу его вкусов.

ТЕОРЕМА 4.2.I (Роуш [I22]). Предыдущая конструкция определяет взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами структурных отображений

$$\theta : (E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \to W$$

и трансферами описанного типа.

Очевидным методом доказательства подобных теорем является метод универсального примера, иначе говоря, лемма Ионеды. Этот метод станет чисто концептуальным, если мы подберем подходящую категорию $\mathscr{C}$. Давайте условимся считать объектами нашей категории пары, в которых первым элементом является n-листное накрытие $p : X \to A$, а вторым - класс $u \in [X, V]$. Морфизмом нашей категории $\mathscr{C}$ из объекта $(p : X \to A; u)$ в объект $(q : Y \to B; v)$ мы назовем гомотопический класс отображений

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

для которых $\xi^* v = u$. Здесь под гомотопией подразумевается отображение n-листных накрытий

$$\begin{tikzcd} I \times X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "1 \times p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ I \times A \arrow[r, "\beta"] & B. \end{tikzcd}$$

Фактически мы докажем существование в категории $\mathscr{C}$ финального объекта $(q : Y \to B; v)$, т.е. объекта, в который направлен в точности один морфизм из любого другого объекта. Отсюда будет сразу же следовать, что между трансферами и классами из $[B, W]$ имеется взаимно однозначное соответствие. Далее, из нашей конструкции финального объекта будет видно, что

$$B = (E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt),$$

14-2

так что всякое отображение $B \to W$ является структурным отображением рассмотренного типа. Далее, наше доказательство финальности построенного объекта приведет к описанию нужного взаимно однозначного соответствия. Действительно, пусть

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

– единственный морфизм в $\mathscr{C}$, существование которого мы утверждаем. Тогда в силу наших основных посылок для данного структурного отображения $\theta: B \to W$ и соответствующего трансфера должно выполняться соотношение

$$p_! u = \theta\alpha,$$

так что все, что нам нужно, – это конструкция отображения α.

Прежде чем продолжать, вероятно, полезно посмотреть на связь n-листных накрытий с ассоциированными главными расслоениями. По заданному n-листному накрытию $p: X \to A$ мы построили пространство $\bar{X}$. Наоборот, по пространству E и свободному правому действию Σ_n на E можно построить n-листное накрытие

$$\begin{tikzcd} E \times_{\Sigma_n} \{1, 2, \dots, n\} \arrow[d, "1 \times_{\Sigma_n} c"] \\ E \times_{\Sigma_n} (pt) \end{tikzcd}$$

(единственное отображение $c: \overline{\{1, 2, \dots, n\}} \to (pt)$ является константой, и это объясняет обозначение c).

Эти две процедуры взаимно обратны. Особенно существенно для нас, что накрытие $p: X \to A$ включается в коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \bar{X} \times_{\Sigma_n} \{1, 2, \dots, n\} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "1 \times_{\Sigma_n} c"'] & X \arrow[d, "p"] \\ \bar{X} \times_{\Sigma_n} (pt) \arrow[r, "\cong"] & A \end{tikzcd}$$

В этой диаграмме верхнее отображение задается композицией

$$\begin{tikzcd}
\bar{X}\times_{\Sigma_n}\{1,2,\dots,n\} \arrow[d, "i\times_{\Sigma_n}1"] & \\
X^n\times_{\Sigma_n}\{1,2,\dots,n\} \arrow[r, "ev"] & X
\end{tikzcd}$$

где отображение вычисления ev действует по формуле

$$ev(\underline{x}, i) = \underline{x}(i).$$

Нам потребуется также существование взаимно однозначного соответствия между отображениями

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\
A \arrow[r, "\alpha"] & B
\end{tikzcd}$$

n-листных накрытий и Σ_n-отображениями

$$\bar{\xi}\colon \bar{X} \to \bar{Y}$$

тотальных пространств ассоциированных главных расслоений. Это соответствие имеет место на уровне отображений, до перехода к гомотопическим классам.

Продолжим построение обещанного финального объекта. Входящее в его состав n-листное накрытие должно быть ассоциировано с главным расслоением $E\Sigma_n\times V^n$; запишем это в явном виде:

$$\begin{tikzcd}
Y = (E\Sigma_n\times V^n)\times_{\Sigma_n}\{1,2,\dots,n\} \arrow[d, "1\times_{\Sigma_n}c"] \\
B = (E\Sigma_n\times V^n)\times_{\Sigma_n}(pt)
\end{tikzcd}$$

Отображение $v\colon Y\to V$ должно представляться композицией

$$\begin{tikzcd}
Y = (E\Sigma_n\times V^n)\times_{\Sigma_n}\{1,2,\dots,n\} \arrow[d, "\pi_2\times_{\Sigma_n}1"] & \\
V^n\times_{\Sigma_n}\{1,2,\dots,n\} \arrow[r, "ev"] & V
\end{tikzcd}$$

Здесь

$$\pi_2 : E\Sigma_n \times V^n \longrightarrow V^n$$

есть проекция на второй сомножитель, а ev, как и выше, - отображение вычисления.

Напомним, что мы уже построили отображение

$$\overline{X} \xrightarrow{(\lambda,\mu)} E\Sigma_n \times V^n$$

главных расслоений. Теперь с его помощью мы можем определить отображение n-листных накрытий. Получается следующий результат:

$$\begin{tikzcd}
X \cong \overline{X} \times_{\Sigma_n} \{1,2,\dots,n\} \arrow[r, "(\lambda,\mu)\times_{\Sigma_n} 1"] \arrow[d, "p"'] \arrow[d, shift left=8ex, "1\times_{\Sigma_n} c"] & (E\Sigma_n \times V^n)\times_{\Sigma_n}\{1,2,\dots,n\} = Y \arrow[d, "1\times_{\Sigma_n} c"] \\
A \cong \overline{X} \times_{\Sigma_n} (pt) \arrow[r, "(\lambda,\mu)\times_{\Sigma_n} 1"] & (E\Sigma_n \times V^n)\times_{\Sigma_n}(pt) = B
\end{tikzcd}$$

Эту диаграмму мы будем коротко записывать в виде

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\
A \arrow[r, "\alpha"] & B
\end{tikzcd}$$

где $\xi = \xi(\lambda,\mu)$, $\alpha = \alpha(\lambda,\mu)$.

ЛЕММА 4.2.2. (i) <u>Для каждого отображения</u> $u: \overline{X} \to V$ <u>формула</u> $\mu = u^n i$ <u>задает единственное</u> Σ_n<u>-отображение</u> $\mu: X \to V^n$, <u>такое, что получающаяся диаграмма</u>

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "\xi = \xi(\lambda,\mu)"'] \arrow[dr, "v"] & \\
X \arrow[rr, "u"] & & V
\end{tikzcd}$$

<u>коммутативна</u> <u>(строго, а не гомотопически)</u>.

(*ii*) <u>Построенная выше диаграмма</u>

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

<u>представляет единственный морфизм категории</u> $\mathscr{C}$ <u>из объекта</u> $(p: X \to A; u)$ <u>в объект</u> $(q: Y \to B; v)$.

Доказательство. Утверждение (i) элементарно и получается простой проверкой непосредственно из определений.

Чтобы доказать (ii), предположим, что заданы два отображения накрытий, скажем

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi_0"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "\alpha_0"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "\alpha_1"] & B \end{tikzcd}$$

где $v\xi_0 \simeq v\xi_1$. Эти два отображения накрытий соответствуют Σ_n-отображениям (λ_t, μ_t) при $t = 0, 1$. Ввиду универсальности $E\Sigma_n$ эти отображения λ_0 и λ_1 продолжаются до Σ_n-отображения

$$\lambda: I \times \bar{X} \to E\Sigma_n.$$

Нам нужно убедиться, что μ_0, μ_1 продолжаются до Σ_n-отображения

$$\mu: I \times \bar{X} \to V^n.$$

Для этого достаточно воспользоваться утверждением (i), взяв в качестве u гомотопию

$$I \times X \to V,$$

связывающую $v\xi_0$ с $v\xi_1$. Таким образом, исходные отображения n-листных накрытий гомотопны. Лемма 4.2.2 доказана.

Согласно сказанному выше, теорема 4.2.I непосредственно вытекает из леммы 4.2.2.

Кан и Придди использовали название "предтрансфер" в частном случае, когда структурное отображение θ является тождественным

отображением i и, следовательно,

$$W = (E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt).$$

Из предыдущего очевидно, что предтрансфер является трансфером, что этот трансфер является инициальным среди всех трансферов и что больше о нем сказать нечего.

ТЕОРЕМА 4.2.3. Если приведенную выше конструкцию применить к структурному отображению

$$(E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \to V,$$

которое определено для любого бесконечнократного пространства петель $V = \Omega^\infty V$, то получится трансфер, совпадающий с трансфером из конструкции 4.1.1.

Этот результат имеется в работе Кана и Придди (см. [74], предложение 1.7).

Чтобы установить требуемое совпадение, выберем в качестве пространства $E\Sigma_n$ пространство $P_{1,n}$ n-наборов кубиков в большом кубе, описанное в гл. 2. (Идею доказательства можно понять, рассматривая r-мерные кубики I^r при фиксированном значении r; но пространство n-наборов r-кубиков, строго говоря, не есть $E\Sigma_n$, так что соответствующее доказательство должно содержать проверку согласованности при изменении r и переходе к пределу, аналогичную проверке из § 4.1.)

Пусть $\bar{x}$ - точка из $\bar{X}$, которую можно интерпретировать так же, как n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X, заданных в определенном порядке и составляющих полный слой накрытия $p: X \to A$. Конструкция 4.1.1 очевидным образом ставит им в соответствие n-набор кубиков $J_1, J_2, \ldots, J_n$ в стандартном кубе I, также заданных в определенном порядке. Возникает отображение

$$\lambda: \bar{X} \to P_{1,n},$$

и ясно, что это отображение λ является Σ_n-отображением. (Наоборот, Σ_n-отображение

$$\lambda: \bar{X} \to P_{1,n}$$

определяет геометрическое вложение описанного в § 4.1 типа, если вы желаете иметь обратную конструкцию.) Внимательный анализ определений показывает, что конструкции § 4.1 и 4.2 соответствуют друг другу при сопряжении.

В некоторых ситуациях структурное отображение

$$(E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \longrightarrow V$$

удается получить прямо, не обращаясь к теореме 4.2.3. Вот простой пример. Пусть V – пространство Эйленберга – Маклейна типа (π, m); тогда оно является бесконечнократным пространством петель (см. гл. I), но, равным образом, можно построить и структурное отображение. Поскольку гомотопические классы отображений в V находятся во взаимно однозначном соответствии с классами когомологий, достаточно рассмотреть группу когомологий $H^m((E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt); \pi)$ и указать в ней подходящий класс. Можно поступить иначе: построить модель пространства V, являющуюся фактически коммутативной группой, и рассмотреть отображение

$$(E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \longrightarrow V,$$

переводящее $(e, v_1, \ldots, v_n)$ в произведение $v_1 v_2 \ldots v_n$.

Даже в том случае, когда наши структурные отображения не происходят из теоремы 4.2.3, читатель может надеяться увидеть, как хорошие свойства трансфера соответствующим хорошим свойствам структурных отображений. Эта надежда вполне оправдана. Рассмотрим, например, случай, когда V и W являются H-пространствами, а следовательно, $[\ ,V]$ и $[\ ,W]$ – функторы со значениями в категории групп. Тогда можно потребовать, чтобы трансфер, соответствующий структурному отображению θ, был гомоморфизмом групп. Ясно, что это условие должно формулироваться в виде гомотопической коммутативности некоторой диаграммы, содержащей θ и две H-структуры μ_V, μ_W, и ясно, как получить это условие. Имеются разложения

$$[X, V \times V] = [X, V] \times [X, V],$$

$$[A, W \times W] = [A, W] \times [A, W]$$

и можно найти структурное отображение Θ, которому соответствует трансфер

$$p_! \times p_! : [X, V] \times [X, V] \longrightarrow [A, W] \times [A, W].$$

Это структурное отображение Θ должно быть отображением в $W \times W$, а потому нужно задать две его компоненты. Первую ком-

поненту мы зададим как композицию

$$
\begin{tikzcd}
(E\Sigma_n \times (V\times V)^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \arrow[d, "(1\times\pi_1^n)\times_{\Sigma_n} 1"] & \\
(E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \arrow[r, "\theta"] & W
\end{tikzcd}
$$

а вторую – как композицию

$$
\begin{tikzcd}
(E\Sigma_n \times (V\times V)^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \arrow[d, "(1\times\pi_2^n)\times_{\Sigma_n} 1"] & \\
(E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \arrow[r, "\theta"] & W
\end{tikzcd}
$$

(Здесь, конечно, $\pi_1 : V\times V \to V$ – проекция на первый сомножитель, а π_2 – проекция на второй сомножитель.) Мы хотим получить следующую коммутативную диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
(E\Sigma_n \times (V\times V)^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "(1\times\mu_V^n)\times_{\Sigma_n} 1"] & W\times W \arrow[d, "\mu_W"] \\
(E\Sigma_n \times V^n) \times_{\Sigma_n} (pt) \arrow[r, "\theta"] & W
\end{tikzcd}
$$

Если выразить Θ явно через θ, то получится нужная диаграмма, гомотопическая коммутативность которой является необходимым и достаточным условием гомоморфности трансфера, соответствующего θ.

Этот путь, очевидно, приводит и к другим ожидаемым хорошим формальным свойствам трансфера. Например, рассмотрим m-листное накрытие $p: X \to Y$ и n-листное накрытие $q: Y \to Z$; тогда композиция

$$X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} Z$$

представляет собой mn-листное накрытие, и мы бы хотели иметь равенство

$$(pq)_! = p_! q_! .$$

для всех таких p, q. Очевидно, этот факт должен соответствовать некоторой диаграмме, включающей θ_n, θ_m и θ_{mn}. Аналогичная ситуация возникает, когда $(m+n)$-листное накрытие расщепляется в несвязную сумму m-листного накрытия и n-листного накрытия.

Причина, по которой мы отказываемся от этого пути, заключается в отсутствии приложений. В наиболее интересных приложениях трансфер получается из бесконечнократных пространств петель, так что, с одной стороны, трансферы обладают всеми нужными нам хорошими свойствами, а с другой стороны, структурные отображения участвуют во всех диаграммах, каких только могут пожелать самые рьяные энтузиасты; нам просто не нужно доказывать никакой эквивалентности.

Сказанное, между прочим, означает, что диаграммами, отражающими хорошие свойства трансфера, всегда будут диаграммы из теории бесконечнократных пространств петель. Разница лишь в том, что в теории трансфера они должны быть гомотопически коммутативны, а в теории бесконечнократных пространств петель - либо строго коммутативны, либо коммутативны с точностью до высших гомотопий. В этом главная причина необратимости перехода от начальных данных конструкции - бесконечнократного пространства петель - к ее результату - трансферу.

§ 4.3. Формальные свойства трансфера

В этом параграфе трансфер всегда будет пониматься в смысле § 4.I. Таким образом, на входе мы имеем расслоение

$$p: X, A \to Y, B$$

с конечными слоями и $A = p^{-1}B$, причем для удобства мы предполагаем, что все наши пространства являются CW-комплексами; на выходе мы получаем отображение спектров

$$p^!: \Sigma^\infty(Y/B) \to \Sigma^\infty(X/A).$$

Мы рассмотрим некоторые формальные свойства этой конструкции. Завершается этот параграф разбором своего рода рабочего примера, на котором я продемонстрирую, как одно из этих свойств трансфера могло бы быть использовано.

Первое очевидное свойство - это естественность. Пусть дана

коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X, A & \xrightarrow{\xi} & X', A' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ Y, B & \xrightarrow{\eta} & Y', B' \end{array}$$

Как и обычно, предположим, что p и p' – накрытия с конечными слоями и что $A = p^{-1}B$, $A' = (p')^{-1}B'$. Кроме того, пусть η отображает B в B' (благодаря чему ξ отображает A в A'), и, наконец, накрытие p индуцировано накрытием p', т.е. ξ взаимно однозначно отображает каждый слой накрытия p на слой накрытия p'. Тогда (гомотопически) коммутативна следующая диаграмма:

$$\text{(4.3.1)} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma^\infty(X/A) & \xrightarrow{\Sigma^\infty \xi} & \Sigma^\infty(X'/A') \\ {\scriptstyle p^!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (p')^!} \\ \Sigma^\infty(Y/B) & \xrightarrow{\Sigma^\infty \eta} & \Sigma^\infty(Y'/B') \end{array}$$

Доказательство элементарно.

Следующее свойство используется для проверки того факта, что после применения когомологического функтора трансфер делается перестановочным с кограничными гомоморфизмами из последовательностей пар. Пусть $p: X, A \to Y, B$ – накрытие с конечными слоями, и пусть $q: A \to B$ – его ограничение на A. Построим по проекции $X \to X/A$ такую последовательность:

$$X \to X/A \xrightarrow{j} (X/A) \cup CX \simeq \Sigma A .$$

То же проделаем для $Y \to Y/B$. Тогда (гомотопически) коммутативна следующая диаграмма:

$$\text{(4.3.2)} \qquad \begin{array}{ccc} \Sigma^\infty(X/A) & \xrightarrow{\Sigma^\infty j} & \Sigma^\infty \Sigma A \simeq \Sigma\Sigma^\infty A \\ {\scriptstyle p^!}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Sigma(q^!)} \\ \Sigma^\infty(Y/B) & \xrightarrow{\Sigma^\infty j} & \Sigma^\infty \Sigma B \simeq \Sigma\Sigma^\infty B \end{array}$$

Н а б р о с о к   д о к а з а т е л ь с т в а . Совершенно очевидно, что конечное накрытие над Y в общем случае не продолжается на конус CY. Тем не менее поскольку существует строго

коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \Sigma^\infty X \arrow[r] & \Sigma^\infty(X/A) \\ \Sigma^\infty Y \arrow[r] \arrow[u, "p^!"] & \Sigma^\infty(Y/B) \arrow[u, "p^!"'] \end{tikzcd}$$

его можно продолжить до следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^\infty X \arrow[r] & \Sigma^\infty(X/A) \arrow[r] & \Sigma^\infty(X/A)\cup C\Sigma^\infty X \\ \Sigma^\infty Y \arrow[r] \arrow[u, "p^!"] & \Sigma^\infty(Y/B) \arrow[r] \arrow[u, "p^!"'] & \Sigma^\infty(Y/B)\cup C\Sigma^\infty Y \arrow[u, "p^!"'] \end{tikzcd}$$

Остается посмотреть, как устроено стоящее справа отображение $p^!$ на $C\Sigma^\infty B$, и сравнить его с отображением $q^!$.

Следующее свойство касается композиции накрытий. Пусть дана последовательность

$$X, A \xrightarrow{p} Y, B \xrightarrow{q} Z, C,$$

где, как обычно, p и q предполагаются накрытиями с конечными слоями и $A = p^{-1}B$, $B = q^{-1}C$. Тогда

$$(qp)^! = p^! q^! \colon \Sigma^\infty(X/A) \longleftarrow \Sigma^\infty(Z/C). \tag{4.3.3}$$

Доказательство элементарно.

Категорично настроенный читатель, возможно, удивлен, почему свойство $1^! = 1$ не сформулировано раньше, чем (4.3.3). Причина состоит в том, что нам нужно более сильное свойство, находящееся к равенству $1^! = 1$ в таком же отношении, как идемпотенты к обратимым элементам. Предположим, что Y есть несвязное объединение подкомплексов:

$$(Y, B) = \coprod_{i\in I} (Y_i, B_i),$$

а X – несвязное объединение части этих комплексов:

$$(X, A) = \coprod_{i\in J} (Y_i, B_i).$$

Пусть, далее, отображение $p\colon X, A \to Y, B$ является вложением (и, значит, расслоением с одноточечными слоями над Y_i для $i \in J$ и расслоением с пустыми слоями над Y_i при $i \notin J$).

(4.3.4) Получающееся отображение

$$p^!: \bigvee_{i\in I} \Sigma^\infty(Y_i/B_i) \longrightarrow \bigvee_{i\in J} \Sigma^\infty(Y_i/B_i)$$

равно 1 на компонентах с номерами $i\in J$ и 0 на компонентах с номерами $i\notin J$.

(Это утверждение очевидно.)

Стандартное применение утверждения (4.3.4) связано с изучением накрытия $p: X,A \to Y,B$, в котором X представляет собой несвязное объединение двух подкомплексов X' и X'', из которых X' является n'-листным накрытием над Y, а X'' есть n''-листное накрытие над Y. Применим (4.3.4) к вложениям

$$X' \longrightarrow X, \quad X'' \longrightarrow X$$

в сочетании с (4.3.3). Мы видим, что компонентами отображения

$$\begin{array}{ccc} p^!: \Sigma^\infty(X/A) & \longleftarrow & \Sigma^\infty(Y/B) \\ \updownarrow = & & \\ \Sigma^\infty(X'/A') \vee \Sigma^\infty(X''/A'') & & \end{array}$$

являются $(p')^!$ и $(p'')^!$.

Последнее свойство, которое мы сформулируем, - это формула произведения. Пусть даны накрытия

$$p': X', A' \longrightarrow Y', B',$$

$$p'': X'', A'' \longrightarrow Y'', B''$$

с обычными для нас свойствами. Тогда отображение

$$p'\times p'': X'\times X'' \longrightarrow Y'\times Y''$$

переводит $A'\times X''\cup X'\times A''$ в $B'\times Y''\cup Y'\times B''$. (Здесь обычно произносят слова о том, что в произведении CW-комплексов должна быть задана CW-топология.) Факторпространства

$$X'\times X''/(A'\times X''\cup X'\times A''), \quad Y'\times Y''/(B'\times Y''\cup Y'\times B'')$$

можно отождествить с

$$(X'/A')\wedge(X''/A''), \quad (Y'/B')\wedge(Y''/B'').$$

(4.3.5). <u>Отображение</u>

$$(p'\times p'')^!: \Sigma^\infty((X'/A')\wedge(X''/A'')) \longleftarrow \Sigma^\infty((Y'/B')\wedge(Y''/B''))$$

<u>может быть отождествлено с</u> $(p')^! \wedge (p'')^!$.

Если наши комплексы Y', Y'' конечномерны, то можно свести дело к кубам $I^{n'}, I^{n''}$ фиксированных размерностей, а в этом случае доказательство очень простое. Оно остается обозримым, если только одно из пространств Y', Y'' является конечномерным. В более же общем случае приходится сталкиваться со всеми неприятностями, присущими приведенным произведениям спектров. Но мы воздержимся от углубления в этот предмет.

Чтобы изучить взаимодействие трансфера с внешними произведениями в когомологиях, мы применим (4.3.5) в сочетании с (4.3.1), например, к диаграмме

$$\begin{tikzcd} X, A \arrow[r, "(1,p)"] \arrow[d, "p"'] & X\times Y, A\times Y \arrow[d, "p\times 1"] \\ Y, B \arrow[r, "\Delta"] & Y\times Y, B\times Y \end{tikzcd}$$

Мы видим, что если E – кольцевой спектр, то

$$p^!: E^*(X,A) \longrightarrow E^*(Y,B)$$

есть гомоморфизм $E^*(Y)$-модулей.

Читатель, вероятно, ждет, что я что-нибудь скажу о <u>формулах двойных смежных классов</u> (см., например, [51], с.257). Я это действительно сделаю: я посоветую вам избегать их. Для этого надо рассуждать геометрически: строить индуцированное накрытие и следить за его расщеплением на компоненты связности. Мы проиллюстрируем этот подход на одном примере.

В этом примере используется сплетение групп. Напомню, что $\Sigma_2 \int \Sigma_n$ обозначает подгруппу в Σ_{2n}, состоящую из перестановок ρ, сохраняющих множество пар (1,2), (3,4), ... , $(2n-1,2n)$. (ρ может переставлять пары и менять местами элементы любой пары.) Эта подгруппа входит в точную последовательность

$$1 \longrightarrow (\Sigma_2)^n \longrightarrow \Sigma_2 \int \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_n \longrightarrow 1.$$

ПРИМЕР 4.3.6. Что нужно поставить в левый верхний угол следующей диаграммы?

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[d, "Tr"'] & H^*(B(\Sigma_2 \int \Sigma_{m+n})) \arrow[l] \arrow[d, "Tr"] \\ H^*(B(\Sigma_{2m} \times \Sigma_{2n})) & H^*(B(\Sigma_{2(m+n)})) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Ответ. Было бы удобно иметь обозримую модель пространства $B\Sigma_r$ (где r будет равно $2(m+n)$). Рассмотрим пространство вложений

$$f: \{1, 2, \ldots, r\} \longrightarrow \mathbb{R}^\infty.$$

Элемент этого пространства можно рассматривать как набор из r различных точек в $\mathbb{R}^\infty$, помеченных символами 1, 2, ... , r. Это пространство стягиваемо, и на нем свободно действует группа Σ_r (при помощи композиций

$$\mathbb{R}^\infty \xleftarrow{f} \{1, 2, \ldots, r\} \xleftarrow{p} \{1, 2, \ldots, r\}).$$

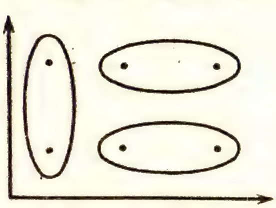
Поэтому это пространство можно рассматривать как $E\Sigma_r$, и модель для $B\Sigma_r$ получается надлежащей факторизацией. Можно представлять себе это $B\Sigma_r$ как пространство непомеченных (и неупорядоченных) наборов из r точек в $\mathbb{R}^\infty$. Нас будет интересовать случай $r = 2(m+n)$. Мы можем построить теперь накрывающие пространства пространства $B\Sigma_r$.

Чтобы построить накрывающее пространство типа $B(\Sigma_{2m} \times \Sigma_{2n})$, рассмотрим пространство наборов из r точек в $\mathbb{R}^\infty$, из которых $2m$ помечены символами a, а $2n$ других – символами b. Проектирование

$$B(\Sigma_{2m} \times \Sigma_{2n}) \longrightarrow B(\Sigma_{2(m+n)})$$

состоит в том, что мы берем набор с помеченными точками и стираем пометки.

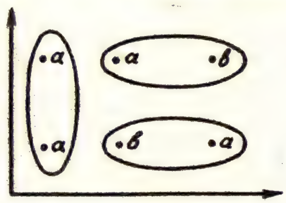
Аналогично, чтобы построить накрывающее пространство типа $B(\Sigma_2 \int \Sigma_{m+n})$, рассмотрим пространство наборов из r точек в R^∞, сгруппированных в $m+n$ пар, которые ничем друг от друга не отличаются:



Дополним теперь до декартова квадрата диаграмму

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r] \arrow[d] & B(\Sigma_2 \int \Sigma_{m+n}) \arrow[d] \\ B(\Sigma_{2m} \times \Sigma_{2n}) \arrow[r] & B(\Sigma_{2(m+n)}) \end{tikzcd}$$

Пространство X, которое нужно подставить в верхний левый угол диаграммы, можно построить как пространство наборов из r различных точек в $\mathbb{R}^\infty$, разбитых на $m+n$ пар и, кроме того (независимо от этого разбиения), помеченных символами a или b, причем число символов a равно $2m$, а число символов b равно $2n$:



Очевидно, что при такой разметке будет $m-q$ пар, помеченных символом aa, $2q$ пар, помеченных ab, и $n-q$ пар, помеченных bb. Поэтому это пространство X расщепляется в несвязное объединение компонент X_q, отвечающих различным q, таким, что $0 \leqslant q \leqslant \min(m,n)$. Каждое пространство X_q имеет тип

$$B((\Sigma_2 \int \Sigma_{m-q}) \times \Sigma_q \times (\Sigma_2 \int \Sigma_{n-q})).$$

Поэтому в верхнем левом углу нашей диаграммы должна стоять группа

$$\bigoplus_q H^*(B((\Sigma_2 \int \Sigma_{m-q}) \times \Sigma_q \times (\Sigma_2 \int \Sigma_{n-q}))),$$

где суммирование производится по $0 \leqslant q \leqslant \min(m,n)$. Это и есть ответ в примере 4.3.6.

Безусловно, остается еще вопрос: что нужно сказать алгебраистам, которые любят двойные смежные классы и настаивают, что в действительности это одно и то же? Я считаю, что лучше всего вежливо улыбнуться и сказать, что вы сделали все, чтобы найти полезную и достаточно близкую интерпретацию двойных смежных классов.

Не стоит добавлять при этом, что наилучшей является именно та интерпретация, которая позволяет вообще избежать упоминания этих (expletive deleted)[1] вещей.

В заключение отмечу, что вариант формулы двойных смежных классов для трансфера Беккера – Готтлиба анонсировал Фешбах (M. Feshbach) на конференции в Эванстоне в 1977 г.[2] Можно сказать, что она столь же полезна для групп Ли, сколь классическая формула двойных смежных классов полезна для конечных групп.

---

[1] Это выражение, означающее "выброшено нецензурное слово", вошло в широкое употребление после "Уотергейтского скандала" 1974 г. Когда были опубликованы магнитофонные записи, сделанные в Белом доме, текст пестрел вставками: expletive deleted. – Прим.ред.

[2] См. [163*]. – Прим.перев.

Глава 5
ГИПОТЕЗА АДАМСА

§ 5.1. Обсуждение гипотезы

Эта глава разделена на два параграфа. В первом я объясню существо рассматриваемой гипотезы, а во втором разберу ее известные к настоящему времени доказательства.

Как уже говорилось, при изучении геометрии многообразий топологам среди прочего приходится исследовать следующие группы и гомоморфизмы:

$$K_O(X) \longrightarrow K_{PL}(X) \longrightarrow K_{Top}(X) \dashrightarrow K_F(X).$$

Нам необходимо указать, насколько это возможно, способы их вычисления, сообщить обо всем, что может помочь их постичь, и т.д.

Основной шаг при вычислении обобщенных когомологий состоит в нахождении группы коэффициентов. Группы коэффициентов теории K_O хорошо изучены. Это гомотопические группы $\pi_r(BO)$, и, согласно теореме периодичности Ботта [42,43,18,50], они задаются таблицей

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	mod 8
$\pi_r(BO) =$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	

Напротив, группы коэффициентов теории $\widetilde{K}_F$ не полностью известны. Это стабильные гомотопические группы сфер, и поэтому можно проводить вычисления лишь в некоторой ограниченной области размерностей, а общая картина неясна.

Можно, конечно, обратиться к гомоморфизму

$$K_O(X) \longrightarrow K_F(X),$$

связывающему с каждым векторным расслоением над X соответствующее сферическое расслоение. Можно посмотреть, как он действует на группы коэффициентов, положив $X = S^n$ и рассмотрев отображение

$$\tilde{K}_O(S^n) \longrightarrow \tilde{K}_F(S^n).$$

Слева стоит группа

$\tilde{K}_O(S^n) = \pi_{n-1}(O) = \pi_{n-1}(SO)$ (во всяком случае, при $n > 1$),

а справа –

$$\tilde{K}_F(S^n) = \pi^S_{n-1}(S^0).$$

Можно показать, что возникающий гомоморфизм является классическим J-гомоморфизмом

$$\pi_{n-1}(SO) \longrightarrow \pi^S_{n-1}(S^0).$$

Чтобы хоть как-то описать группу $K_F(X)$, нам потребуются инварианты сферических расслоений относительно послойной гомотопической эквивалентности. Простейшими такими инвариантами являются классы Штифеля – Уитни. Главная причина их послойной гомотопической инвариантности состоит в том, что они имеют специфическое определение, которое я сейчас изложу. Предположим, что наши сферические расслоения устроены таким образом, что над X лежит E_0 – тотальное пространство $(n-1)$-сферического расслоения и это пространство E_0 вложено в E, тотальное пространство ассоциированного n-шарового расслоения. Например, даже если $p: E_0 \to X$ является расслоением в каком-нибудь слабом смысле, то обычно можно построить E как цилиндр отображения p. Тогда каждый слой в E является конусом над соответствующим слоем в E_0. При таких условиях мы получим изоморфизм Тома

$$\varphi: H^r(X; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H^{n+r}(E, E_0; \mathbb{Z}/2).$$

(По-другому, можно считать E тотальным пространством векторного расслоения, а E_0 – дополнением нулевого сечения, как это делалось в § 1.8. Или же, если вы предпочитаете не вводить E, вы можете заменить когомологии пары $E \operatorname{mod} E_0$ когомологиями отображения p. Но я буду придерживаться общепринятого способа изложения.) Имеется следующая диаграмма, в которой Sq^i – квад-

рат Стинрода:

$$\begin{array}{ccc} H^{n+r}(E, E_0; \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{n+r+i}(E, E_0; \mathbb{Z}/2) \\ \varphi \uparrow \cong & & \varphi \uparrow \cong \\ H^r(X; \mathbb{Z}/2) & & H^{r+i}(X; \mathbb{Z}/2) \end{array}$$

Определим i-й класс Штифеля – Уитни нашего сферического расслоения ξ формулой

$$w_i(\xi) = \varphi^{-1} Sq^i \varphi(1).$$

Более или менее очевидно, что если заменить расслоение ξ другим, послойно гомотопически ему эквивалентным расслоением, то приведенная выше диаграмма заменится изоморфной диаграммой, а потому классы $w_i(\xi)$ не изменятся.

Безусловно, классов Штифеля – Уитни недостаточно, чтобы различать элементы из $K_F(X)$. Однако вернемся к вещественной K-теории и рассмотрим вещественные векторные расслоения над X. Тогда классы Штифеля – Уитни w_1 и w_2 позволяют выделить класс расслоений, ориентируемых в вещественной K-теории. Если $w_1(\xi)=0$ и $w_2(\xi)=0$, то имеется изоморфизм Тома

$$KO^r(X) \xrightarrow[\cong]{\varphi} KO^{n+r}(E, E_0).$$

Здесь я вынужден сознаться, что невозможно следовать принятым обозначениям и быть последовательным: $KO(X)$ обозначает ту же душу, что и $K_0(X)$, но обозначение $KO^0(X)$ выглядит приятнее, чем $K_0^0(X)$.) Во всяком случае, этот изоморфизм Тома позволяет определить послойные гомотопические инварианты в KO-теории по образцу классов Штифеля – Уитни. Для этого необходимо, конечно, заменить квадрат Стинрода подходящей когомологической операцией в вещественной K-теории.

В статье [I] я определил некоторые операции

$$\Psi^k : KO^0(X) \longrightarrow KO^0(X).$$

Они определяются через внешние степени векторных расслоений. При этом они по определению являются мультипликативными гомоморфизмами кольца $KO^0(X)$ в кольцо $KO^0(X)$.

Можно превратить их в стабильные операции, заплатив за это введением коэффициентов из $\mathbb{Z}[1/k]$. То есть имеются операции

$$\Psi^k : KO^n(X) \longrightarrow KO^n(X; \mathbb{Z}[1/k])$$

или

$$\Psi^k : KO^n(X; \mathbb{Z}[1/k]) \longrightarrow KO^n(X; \mathbb{Z}[1/k]).$$

Следовательно, можно построить диаграмму

$$\begin{tikzcd} KO^n(E, E_0) \arrow[r, "\Psi^k"] & KO^n(E, E_0; \mathbb{Z}[1/k]) \\ KO^0(X) \arrow[u, "\varphi", "\cong"'] & KO^0(X; \mathbb{Z}[1/k]) \arrow[u, "\varphi", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Положим

$$\rho^k(\xi) = \varphi^{-1} \Psi^k \varphi(1).$$

Будем рассматривать ρ^k как характеристический класс, аналогичный классу Штифеля – Уитни. Он определен для векторных расслоений и принимает значения в $KO^0(X; \mathbb{Z}[1/k])$. Он удовлетворяет формуле сложения, а именно

$$\rho^k(\xi \oplus \eta) = \rho^k(\xi) \cdot \rho^k(\eta),$$

и определен на классах стабильно эквивалентных векторных расслоений. Он удовлетворяет некоторому подходящему условию послойной гомотопической инвариантности. Однако это условие уже не столь просто, как в случае классов Штифеля – Уитни, поскольку послойные гомотопические эквивалентности не обязаны сохранять класс ориентации $\varphi(1)$. Можно проводить эффективные вычисления, используя класс ρ^k. Обо всем этом написано в [3].

Более того, можно надеяться, что классы ρ^k определены для KO-ориентированных сферических расслоений (см. § 1.8).

Все это дает способ доказательства того, что образы двух элементов из $K_O(X)$ в группе $K_F(X)$ различны. Но нам нужно также уметь доказывать, что два разных элемента из $K_O(X)$ имеют один и тот же образ в $K_F(X)$, когда это действительно так. Вот соответствующий результат.

ТЕОРЕМА 5.1.1. Композиция

$$BO \xrightarrow{\Psi^k - 1} BO \longrightarrow BF\mathbb{Z}[1/k]$$

гомотопна нулю.

Это утверждение обычно называют гипотезой Адамса. Это современная переформулировка, в которой используется локализация некоторого утверждения, приведенного как гипотеза в моей статье [2] (см. с. 183). В этом утверждении отображение, обозначенное символом $\Psi^k - 1$, соответствует когомологической операции

$$x \longmapsto \Psi^k(x) - x.$$

Были два основания для выдвижения такой гипотезы. Во-первых, оказалось, что при ее выполнении можно было бы построить прекрасно работающую формальную теорию, с помощью которой можно было бы вычислить образ гомоморфизма

$$K_O(X) \longrightarrow K_F(X)$$

в терминах K-теории [4]. Во-вторых, я умел доказывать более слабые результаты, согласующиеся с 5.1.1. В частности, следующий результат приведен в [2] (см. с. 183).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1.2. Композиция

$$X \xrightarrow{f} BO \xrightarrow{\Psi^k - 1} BO \longrightarrow BF\mathbb{Z}[1/k]$$

гомотопна нулю, если X есть конечный комплекс и f – классифицирующее отображение прямой суммы двумерных расслоений.

Этих более слабых результатов как раз хватило для вычисления образа классического J-гомоморфизма

$$\pi_{n-1}(SO) \longrightarrow \pi^S_{n-1}(S^0)$$

с точностью до множителя 2 (при $n \neq 0 \bmod 8$ получается полный ответ, но случай $n = 0 \bmod 8$ особенно интересен). Результат о классическом J-гомоморфизме в законченном виде следует из теоремы 5.1.1, к обсуждению которой мы сейчас переходим. Возможно, стоит отметить, что даже для классического J-гомоморфизма нет ни одного опубликованного доказательства, независимого от тех идей, к обсуждению которых мы переходим. Специалистам по теории

гомотопий в принципе известно, где нужно искать независимое доказательство, однако никто до сих пор не пожелал взять на себя тяжелую задачу подробного разбора и оформления такого доказательства.

§ 5.2. Доказательства гипотезы

Теорема 5.1.1 доказана рядом авторов.

Суть дела лучше всего проясняет доказательство Сулливана в работе [150] (см. также [149]. - Перев.). Хотя это доказательство не было первым, оно оказало влияние на другие доказательства еще до своего появления в печати, и следует отдать должное Сулливану, идеи которого имели столь глубокое значение. В доказательстве Сулливана используются методы современной алгебраической геометрии, но я не буду пытаться даже коротко рассказать о них.

Сулливан пишет, что Квиллен "первым вызвал джинна алгебраической геометрии в характеристике p в связи с изучением гипотезы Адамса". Я полагаю, что это относится к доказательству, план которого был изложен Квилленом в [116] и которое закончил Фридлэндер [60]. Однако у Фридлэндера доказательство ограничивается комплексным случаем, т.е. оно проведено для композиции

$$BU \xrightarrow{\Psi^k - 1} BU \longrightarrow BF\mathbb{Z}[1/k].$$

Безусловно, всегда полезно разобрать сначала более простой, комплексный случай, однако вы рискуете потерять ту самую двойку, если не обобщите доказательство и на вещественный случай.

Первым опубликованным полным доказательством было второе доказательство Квиллена [118]. Я приведу набросок его метода, ограничившись для простоты комплексным случаем. Достаточно ограничиться ситуацией, когда k есть простое число p. Однако нам дальше удобнее использовать степень простого числа q. Как уже говорилось, Квиллен построил отображение

$$BGL(\infty, \bar{F}_q) \longrightarrow BU,$$

индуцирующее изоморфизм когомологий с некоторыми коэффициентами, в частности с коэффициентами $\pi_*(BF\mathbb{Z}[1/q])$. После этого, согласно теории препятствий, достаточно доказать, что композиция

$$BGL(\infty, \bar{F}_q) \longrightarrow BU \xrightarrow{\Psi^q - 1} BU \longrightarrow BF\mathbb{Z}[1/q]$$

гомотопна нулю.

Оказывается, что для этого достаточно доказать гомотопность нулю композиции

$$X \xrightarrow{f} BU(n) \xrightarrow{\Psi^q-1} BU \longrightarrow BF\mathbb{Z}[1/q],$$

в которой X – конечный комплекс, а отображение f представляет расслоение над X, структурной группой которого является не группа $U(n)$, а нормализатор $N(T)$ максимального тора T в $U(n)$. (Этот нормализатор является групповым расширением с ядром T и факторгруппой, равной симметрической группе Σ_n.) Подробнее, поскольку гомотопические группы пространства $BF\mathbb{Z}[1/q]$ конечны, достаточно показать, что композиция

$$X \longrightarrow BGL(\infty, \bar{F}_q) \longrightarrow BU \xrightarrow{\Psi^q-1} BU \longrightarrow BF\mathbb{Z}[1/q]$$

гомотопна нулю, если X есть конечный подкомплекс в $BGL(\infty,\bar{F}_q)$. А в этом можно убедиться при помощи стандартных гомотопических рассуждений. Действительно, поскольку $GL(\infty,\bar{F}_q)$ есть объединение конечных подгрупп $\Gamma = GL(m, F_{q^s})$, можно считать, что X пробегает конечные подкомплексы в $B\Gamma$, где Γ пробегает все такие конечные подгруппы. Согласно теореме Атьи [17, 20], любое такое отображение

$$X \longrightarrow B\Gamma \longrightarrow BU$$

индуцировано некоторым виртуальным представлением α группы Γ. Далее, согласно теории представлений, α является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией представлений β, индуцированных одномерными комплексными представлениями подгрупп группы Γ. Значит, достаточно рассмотреть композиции

$$X \longrightarrow B\Gamma \xrightarrow{B\beta} BU(n) \xrightarrow{\Psi^q-1} BU \longrightarrow BF\mathbb{Z}[1/q].$$

Но индуцированное представление β разлагается в композицию

$$\Gamma \longrightarrow N(T) \subset U(n).$$

Наше утверждение доказано.

Но для расслоений со структурной группой T доказываемый факт справедлив ввиду предложения 5.1.2, и оказывается, что конструкция, использованная мною в [2] для доказательства этого предположения, достаточно естественна и годится также и для рас-

17-1

слоений со структурной группой $N(T)$. Это замечание завершает набросок доказательства, по крайней мере для комплексного случая.

В работе [118] Квиллен разбирает также и вещественный случай. Действительно, замечания из последнего абзаца применимы к этому случаю в слегка измененном виде. Но линейную группу $GL(\infty, \bar{F}_q)$ следует заменить ортогональной группой, а это, безусловно, изменяет доказательство когомологической эквивалентности.

Именно в этом контексте Квиллен пришел к своему вычислению K-групп для конечных полей. Действительно, отображение Ψ^q пространства BU соответствует отображению пространства $BGL(\infty, \bar{F}_q)$, индуцированному автоморфизмом Фробениуса $x \mapsto x^q$. Поэтому композиция

$$BGL(\infty, F_q) \longrightarrow BGL(\infty, \bar{F}_q) \longrightarrow BU \xrightarrow{\Psi^q - 1} BU$$

гомотопна нулю. Определим $F(\Psi^q - 1)$ как слой отображения

$$BU \xrightarrow{\Psi^q - 1} BU,$$

превращенного в расслоение. Тогда мы получим отображение

$$BGL(\infty, F_q) \longrightarrow F(\Psi^q - 1),$$

и Квиллен [119] показал, что оно является гомологической эквивалентностью, т.е. что

$$(BGL(\infty, F_q))^+ \simeq F(\Psi^q - 1).$$

Но гомотопические группы пространства $F(\Psi^q - 1)$ известны. Поэтому вычислены группы

$$\pi_*((BGL(\infty, F_q))^+),$$

т.е. $K_*(F_q)$.

В заключение обратимся к доказательству Беккера и Готтлиба [33]. Оно основывается на том, что K_F является нулевым членом некоторой обобщенной теории когомологий. Для этого, конечно, необходимо процитировать соответствующий результат из теории бесконечнократных пространств петель, из [39, 40] либо какого-нибудь другого источника. И это неизбежно - на этом основано рассуждение. Предтеорема 4.1.2 показывает, что отображение

$$K_F(BG) \longrightarrow K_F(BN)$$

является расщепляющим мономорфизмом на прямое слагаемое. (О состоятельности этого рассуждения см. гл. 4.) Вместе с фактом, что пространство BG аппроксимирует BU или BO, и еще некоторыми подробностями это позволяет свести доказательство гипотезы Адамса к случаю расслоения со структурной группой $N = N(T)$, а в этом случае мы поступаем так же, как в обсуждавшемся доказательстве Квиллена.

На этом я заканчиваю свой обзор доказательств гипотезы Адамса.

Глава 6

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СПЕКТРОВ ДЛЯ K-ТЕОРИЙ; ТЕОРЕМЫ АДАМСА – ПРИДДИ И МАДСЕНА – СНЭЙТА – ТОРНХЭВА

§ 6.1. Введение

Прежде всего вспомним функтор Ω^∞ из категории спектров в категорию пространств, построенный в гл.1. Состояние наших знаний о нем мы можем проверить, рассматривая следующие четыре типа проблем.

(a) Имеет ли данное пространство X вид $\Omega^\infty X$ для некоторого спектра X? Иными словами, является ли X бесконечнократным пространством петель?

(b) Если X имеет вид $\Omega^\infty X$, то единствен ли такой спектр X? Иными словами, если X обладает структурой бесконечнократного пространства петель, то единственна ли эта структура?

(c) Пусть даны два спектра X и Y и отображение f: $\Omega^\infty X \to \Omega^\infty Y$. Можно ли представить f в виде $\Omega^\infty f$ для некоторого $f: X \to Y$? Иными словами, является ли f бесконечнократным петлевым отображением (для данных структур бесконечнократных пространств петель)?

(d) Если в проблеме (c) отображение $f: X \to Y$, такое, что $\Omega^\infty f = f$, существует, то единственно ли оно?

Относительно проблемы (a) мы можем сказать, что здесь дела обстоят достаточно удовлетворительно, и уже не первый год. Неизвестно каких-нибудь интересных примеров пространств, относительно которых высказывалось бы предположение, что они являются бесконечнократными пространствами петель, но которые не оказались бы ими.

Что касается проблем (b), (c) и (d), то здесь дела обстоят неудовлетворительно; у нас нет хорошего общего метода решения таких проблем. Однако имеется ряд интересных и полезных результатов, относящихся к некоторым частным случаям, и именно они составят содержание этой главы.

Возможно, мне следует объяснить мое замечание об отсутствии общих методов. В обеих проблемах (b) и (c) требуется построить отображение $f: X \to Y$. (Для решения проблемы единственности (b) надо по гомотопической эквивалентности $\Omega^\infty X \simeq \Omega^\infty Y$ построить эквивалентность спектров $e: X \to Y$.) Проблема (d) еще хуже, так как там требуется строить гомотопию. Конечно, в принципе не исключена возможность построения бесконечнократных петлевых отображений при помощи машин, описанных в гл. 2. Однако для этого в дополнение к машинам требуется и соответствующее топливо – например, отображение одной пермутативной категории в другую, согласованное со всеми рассматриваемыми структурами. Это – исключительно высокооктановое горючее. Двигаясь в этом направлении, можно кое-чего достичь, и такой подход использовался в некоторых недавних работах. Например, можно взять категорию, в которой объектами являются конечные множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, а морфизмами – их автоморфизмы; можно, далее, поставить в соответствие каждому конечному множеству свободный R-модуль, порожденный этим множеством. Или еще можно рассмотреть категорию, в которой объекты – конечномерные векторные пространства над конечным полем $\mathbb{F}_q$, а морфизмы – их автоморфизмы; потом можно поставить в соответствие каждому векторному пространству соответствующее подстилающее множество. Такого рода конструкции удобны тем, что в силу своей алгебраической природы они дают отображения, которые легко контролировать. Топологи имеют обыкновение называть конструкции этого типа дискретными моделями; читатель может ознакомиться с ними в [99], гл. VI, § 5, и гл. VIII.

Однако есть много отображений, в существование которых хочется верить и которые действительно существуют, но не могут быть получены таким образом. Сейчас я приведу пример; я сознаю, что в некотором отношении он спорен, но исторически он способствовал развитию излагаемых методов.

Функтор "внешняя алгебра" относит каждому векторному пространству V над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ алгебру $\Lambda(V)$. Он относит также каждому вещественному векторному расслоению ξ над X векторное расслоение $\Lambda(\xi)$; при этом имеются канонические изоморфизмы

$$\Lambda(\xi \oplus \eta) \cong \Lambda(\xi) \otimes \Lambda(\eta),$$

$$\Lambda(1) = 2.$$

Это определяет естественное преобразование K-функтора или, иначе говоря, отображение

$$\Lambda: BO_{\oplus} \longrightarrow BO_{\oplus}\mathbb{Z}[1/2].$$

Хотелось бы показать, что это отображение является бесконечнократным петлевым. Действительно, разве "внешняя алгебра" не есть лучший из всех функторов, превращающих сложение в умножение (см. § 1.8, 5.1)? Но наша машина упорно твердит, что этот функтор для нее не подходит или по крайней мере что его невозможно превратить в отображение спектров, отвечающее геометрическому содержанию задачи.

На это, однако, можно возразить, что наши трудности возникают из-за надежды на машину, которая по природе своей приспособлена к преодолению трудностей самого общего характера; возможно, было бы лучше положиться на благоприятные обстоятельства, возникающие в интересующих нас частных случаях. (Позже я немного скажу о том, какие частные случаи здесь могут представиться и почему они могут нас заинтересовать.) Практически это предложение сводится к следующему: вызовите консультанта по старомодной теории гомотопий, покажите ему спектры X и Y и попросите его построить старомодными гомотопическими методами морфизм из X в Y, пообещав рассчитаться с ним как за тяжелую физическую работу. В действии эту стратегию мы увидим в следующем § 6.2, где речь идет о теореме Адамса – Придди; эта теорема в своем частном случае решает проблему (ℓ).

Однако стратегия "апелляции к теории гомотопий" иногда наталкивается на проблему общения; обращаясь к консультанту по старомодной теории гомотопий, вы должны продемонстрировать ему оба спектра. Если вы просто заявите ему: "Имеется спектр машинной выработки", то он, скорее всего, решит, что эта тварь для него несъедобна. В этом можно упрекнуть создателей машин ("Сделайте ваши черные ящики чуть прозрачнее!"), но по-моему это было бы несправедливо. Достойные машиностроители полны желания произвести бесконечное число инвариантов, отражающих бесконечнократную петлевую структуру в бесконечнократных пространствах петель, например, они стремятся к тому, чтобы почти всякая теория, рекомендованная ими к использованию в вычислениях, была снабжена операциями Дайера – Лашофа и трансфером. И несомненно, дело специалиста по теории гомотопий – выяснить, достаточно ли этих "первичных" инвариантов для решения поставленной задачи; и если их

недостаточно, уж его забота определить, какие требуются вторичные ужасы.

По-видимому, наиболее полезным из имеющихся инвариантов является трансфер. В частности, в § 6.3 мы изложим теорему Мадсена, Снэйта и Торнхэва, которая в частном случае решает проблемы (c) и (d); она утверждает, что хотя в общем случае условие существования трансфера с определенными свойствами только необходимо для получения решения, в некотором частном случае оно также и достаточно. Остальная часть этой главы посвящена внимательному изучению основных идей ее доказательства. Я хочу предупредить читателя, что в этой части изложение будет несколько более детализированным, чем в предыдущих частях этой книги, так что, может быть, ее стоит пропустить.

§ 6.2. Теорема Адамса и Придди

Эта теорема в некотором частном случае решает проблему (b) из § 6.1. Она сравнивает "неизвестный" спектр X с некоторым "стандартным" спектром; для описания последнего мы изложим метод "убивания" гомотопических групп. Для любого спектра Y существует спектр $Y(n,\dots,\infty)$, снабженный отображением $Y(n,\dots,\infty)\to Y$ и характеризующийся следующими двумя свойствами:

(i) $\pi_r(Y(n,\dots,\infty))=0$ при $r<n$;

(ii) индуцированное отображение

$$\pi_r(Y(n,\dots,\infty))\longrightarrow\pi_r(Y)$$

является изоморфизмом при $r\geqslant n$.

Возьмем, например, в качестве Y спектр KO, представляющий классическую периодическую вещественную K-теорию, и положим $bso=KO(2,\dots,\infty)$. Спектр bso представляет "односвязную вещественную K-теорию", а $\Omega^\infty bso$ есть H-пространство $BSO_\oplus$. Мы будем также обозначать наш спектр через $bso_\oplus$, чтобы отличить его от его возможных конкурентов.

ТЕОРЕМА 6.2.1 ([14]). <u>Пусть p - некоторое простое число и X - связный спектр. Предположим, что задана гомотопическая эквивалентность пространств</u>

$$\Omega^\infty X\simeq BSO\,\mathbb{Z}_{(p)};$$

тогда имеет место и гомотопическая эквивалентность спектров

$$X \simeq bso_{\oplus} \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Здесь $BSO\mathbb{Z}_{(p)}$ есть локализация пространства BSO (см. гл. 3), и аналогично обстоит дело для спектров. Теорема показывает, что структура бесконечнократного пространства петель на $BSO\mathbb{Z}_{(p)}$, по существу, единственна.

Имеется аналогичная теорема, в которой локализация заменена более энергичной операцией пополнения (это понятие читатель может найти в [150] или [46])[1]. Теорема остается верной и при замене группы SO группой SU; замена группы SO группой O возможна лишь при нечетном p. Для группы O и $p = 2$, а также для группы U и любого p теорема в том виде, как она здесь сформулирована, неверна, но ее можно сделать верной ценой небольшого усиления условий; более чем достаточно предполагать, что данная гомотопическая эквивалентность является эквивалентностью H-пространств, например, что имеется H-эквивалентность

$$\Omega^{\infty} X \simeq BU_{\oplus} \mathbb{Z}_{(p)}.$$

ПРИМЕР 6.2.2. Бесконечнократные пространства петель $BSO_{\oplus}$ и $BSO_{\otimes}$ (см. § 1.8) становятся эквивалентными как бесконечнократные пространства петель после локализации по любому простому p; другими словами, соответствующие спектры $bso_{\oplus}$ и $bso_{\otimes}$ становятся эквивалентными после локализации по любому простому p.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2.3. Сами спектры $bso_{\oplus}$ и $bso_{\otimes}$ не эквивалентны; на самом деле даже пространства $BSO_{\oplus}$ и $BSO_{\otimes}$ не эквивалентны как H-пространства. Это показывает, что вся эта суета вокруг локализации действительно необходима.

Я намечу доказательство замечания 6.2.3. Пусть дано H-отображение $f: BSO_{\oplus} \to BSO_{\otimes}$. Рассмотрим индуцированные отображения гомотопических групп

$$f_*: \pi_4(BSO) \longrightarrow \pi_4(BSO),$$

$$f_*: \pi_8(BSO) \longrightarrow \pi_8(BSO).$$

---

[1] См. также переведенную на русский язык книгу [149]. – Прим. перев.

Они являются умножениями на целые числа, скажем n и m соответственно, и если n фиксированно, то однозначно определен вычет $m \bmod 12$. Этот вычет можно найти, исследовав какое-нибудь доступное H-отображение с правильным значением n; например, если $n = 1$, то можно взять отображение

$$\rho^5 \colon BSO_{\oplus} \longrightarrow BSO\mathbb{Z}[1/5]$$

(см. [3]) и получить, что $m \equiv 7 \bmod 12$. Для гомотопической эквивалентности обязательно $m = \pm 1$, и потому не существует H-эквивалентности с $n = 1$. Случай $n = -1$ можно свести к случаю $n = +1$, скомпоновав первое отображение с эндоморфизмом $\Omega^{\infty}(-1)$ области определения или области значений.

ПРИМЕР 6.2.4. Пространства F/PL (или F/Top) и BO становятся эквивалентными бесконечнократными пространствами петель после локализации по любому нечетному p.

На самом деле эти пространства сами являются бесконечнократными пространствами петель, как доказали Бордман и Фогт [39, 40] (см. § 1.8); то, что после локализации по нечетному p они становятся гомотопически эквивалентными как топологические пространства, доказал Сулливан ([150], с. 24)[1].

Теперь я намечу доказательство теоремы 6.2.1. Пусть X — "неизвестный" спектр, а Y — "стандартный" спектр $bso_{\oplus}\mathbb{Z}_{(p)}$, с которым надо сравнить спектр X. Первый основной шаг состоит в проверке того, что когомологии $H^*(X;\mathbb{Z}/p)$ спектра X (с коэффициентами по модулю p) изоморфны как A-модули (где A есть алгебра Стинрода по модулю p) тому, чему они должны быть изоморфны; например, при $p = 2$ они должны быть изоморфны

$$H^*(Y;\mathbb{Z}/2) = A/A(Sq^1, Sq^3).$$

Идея этой проверки состоит в том, что гомотопические группы спектра X определяются известными нам гомотопическими группами пространства $\Omega^{\infty}X$ и что можно также получить достаточную информацию о k-инвариантах спектра X.

---

1) Аккуратное доказательство имеется в книге [166], русский перевод которой готовится в издательстве "Мир". — Прим. перев.

Когомологические вычисления позволяют исследовать спектральную последовательность Адамса

$$\mathrm{Ext}_A^{**}(H^*(Y;\mathbb{Z}/p),H^*(X;\mathbb{Z}/p))\Rightarrow [X,Y]_*;$$

изоморфизм A-модулей

$$H^*(Y;\mathbb{Z}/p)\cong H^*(X;\mathbb{Z}/p)$$

можно рассматривать как некоторый элемент θ из Ext^0.

Второй основной шаг состоит в доказательстве того, что группа

$$\mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(Y;\mathbb{Z}/p),H^*(X;\mathbb{Z}/p))$$

тривиальна при $t-s=-1$. Отсюда следует, что элемент θ принадлежит ядру всех дифференциалов. Этот шаг, конечно, в основном заключается в вычислении; его можно сделать более концептуальным, построив структурную теорию модулей над маленькими подалгебрами алгебры Стинрода A.

Третий основной шаг состоит в преодолении трудностей, связанных со сходимостью спектральной последовательности Адамса, ибо наш случай, конечно, абсолютно выпадает из той области, где работают хорошо известные достаточные условия сходимости спектральной последовательности Адамса. Однако все же удается доказать, что изоморфизм θ индуцируется некоторым отображением спектров $f\colon X\to Y$. Доказательство существенным образом использует тот факт, что нам известно достаточно много эндоморфизмов стандартного спектра Y. Построив отображение f, уже нетрудно показать, что оно является эквивалентностью.

Этим завершается изложение схемы доказательства.

§ 6.3. Теорема Мадсена, Снэйта и Торнхэва

Эта теорема в некотором частном случае решает проблемы (c) и (d) из § 6.1. Я начну с "глобального" варианта теоремы, который сам по себе делится на три части, 6.3.1 - 6.3.3. Потом я объясню, что имеются также "p-локальный" и "p-полный" варианты этой теоремы и что эти варианты, будучи более простыми и элементарными, заслуживают того, чтобы доказать их в первую очередь; они сформулированы ниже в виде предложений 6.3.4 - 6.3.9 и сопровождаются кратким обсуждением. Затем я попытаюсь показать, в чем польза от этих результатов, на примере некоторых следствий,

которые получили из них Мадсен, Снэйт и Торнхэв. В заключение я скажу несколько слов о доказательствах.

Но сначала посмотрим на формулировки.

ТЕОРЕМА 6.3.I. Если X и Y – такие связные спектры, что

$$\Omega^{\infty}X \simeq BSO, \quad \Omega^{\infty}Y \simeq BSO,$$

то отображение

$$\Omega^{\infty}\colon [X,Y] \longrightarrow [\Omega^{\infty}X, \Omega^{\infty}Y]$$

инъективно.

Здесь $[X,Y]$ есть множество гомотопических классов морфизмов в категории спектров, а $[\Omega^{\infty}X, \Omega^{\infty}Y]$ есть множество гомотопических классов отображений в категории пространств. Очевидно, что эта теорема решает (в своем частном случае) проблему (d) из § 6.I; ответ состоит в том, что отображение пространств $f\colon \Omega^{\infty}X \to \Omega^{\infty}Y$ допускает не более одного бесконечнократного распетливания.

ТЕОРЕМА 6.3.2. Если X и Y – такие связные спектры, что

$$\Omega^{\infty}X \simeq BSO, \quad \Omega^{\infty}Y \simeq BSO,$$

то следующие условия, наложенные на отображение

$$f\colon \Omega^{\infty}X \longrightarrow \Omega^{\infty}Y,$$

эквивалентны:

(i) гомотопический класс отображения f лежит в $\operatorname{Im}\Omega^{\infty}$;

(ii) f есть H-отображение, и естественное преобразование

$$f_*\colon [W, \Omega^{\infty}X] \longrightarrow [W, \Omega^{\infty}Y]$$

коммутирует с трансферами, отвечающими накрытиям

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1})$$

(где p пробегает все простые числа, а r – целые числа 0, I, 2, ...).

Сделаем остановку, чтобы осмыслить последнее предложение. Любое накрывающее отображение (связного пространства в связное пространство) индуцирует на фундаментальных группах мономорфизм; применительно к упомянутому выше накрытию это дает мономорфизм $\mathbb{Z}/p^r \to \mathbb{Z}/p^{r+1}$. В группе $\mathbb{Z}/p^{r+1}$ имеется лишь одна подгруппа,

изоморфная группе $\mathbb{Z}/p^r$, и, взяв соответствующее накрытие над $B(\mathbb{Z}/p^{r+1})$, мы получим "вполне определенное" накрытие

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1}).$$

По условию нашей теоремы

$$[W, \Omega^\infty X] = [W, BSO] = \widetilde{KSO}(W),$$

$$[W, \Omega^\infty Y] = [W, BSO] = \widetilde{KSO}(W),$$

так что индуцированное отображение f_* можно трактовать как когомологическую операцию

$$f_* : \widetilde{KSO}(W) \longrightarrow \widetilde{KSO}(W).$$

Если f есть H-отображение, то операция f_* аддитивна; в нашем же утверждении требуется, чтобы она также коммутировала с трансфером. Мне представляется, что импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii) после гл. 4 можно считать очевидной.

Теорема 6.3.2 решает (в своем частном случае) проблему (c) из § 6.1; она дает практически применимый способ узнать, является ли данное отображение бесконечнократным петлевым.

ТЕОРЕМА 6.3.3. (a) <u>Если</u> X <u>и</u> Y <u>– такие связные спектры, что</u>

$$\Omega^\infty X \simeq SO, \quad \Omega^\infty Y \simeq BO,$$

<u>то</u>

$$[X, Y] = 0.$$

(b) <u>Если</u> X <u>и</u> Y <u>– такие связные спектры, что</u>

$$\Omega^\infty X \simeq Spin, \quad \Omega^\infty Y \simeq BSO,$$

<u>то</u>

$$[X, Y] = 0.$$

Естественно получать такого рода результаты, отталкиваясь от теорем 6.3.1, 6.3.2 и интересуясь соответствующими результатами о градуированной группе[1] $[X, Y]_*$. Результаты, подобные теореме 6.3.3, можно использовать в стандартных рассуждениях с точны-

---

[1] Спектр X с $\Omega^\infty X = BSO$ (как в 6.3.2) и спектр X' с $\Omega^\infty X' = SO$ (как в 6.3.3) получаются один из другого сдвигом градуировки. – <u>Прим. перев.</u>

ми последовательностями для доказательства единственности отображений спектров.

Справедливы аналоги теорем 6.3.1, 6.3.2, в которых вместо группы SO фигурирует группа SU, и то же самое относится к 6.3.3. Для простоты и эффективности я выбрал "глобальные" варианты этих теорем, т.е. варианты "над $\mathbb{Z}$", но есть еще "p-локальный" и "p-полный" их варианты, и на самом деле лучше в первую очередь доказывать именно их.

Все теоремы восходят к Мадсену, Снэйту и Торнхэву [86, 87]. Однако эти авторы сосредоточивают свое внимание на p-локальном и p-полном случаях в ущерб глобальному случаю; кроме того, у них нет явной формулировки теоремы 6.3.3, хотя их методы легко позволяют доказать ее для всех простых p, кроме $p = 2$; последний случай рассмотрен в [80]. По поводу глобальных вариантов теорем 6.3.1, 6.3.2 и 6.3.3 читатель может обратиться к [99], теорема 7.1, с.130, теорема 1.6, с.212, и теорема 7.2, с.131.

Как я уже говорил, целесообразно начать с доказательств p-локального и p-полного вариантов теоремы, и обычный здравый смысл подсказывает, что глобальный вариант получается из них более или менее стандартным использованием общепринятой техники локализации и пополнения с добавлением, возможно, аргументов, связанных с функтором $\lim^1$ – первым производным функтором обратного предела $\lim$. Я с радостью пойду этим путем и, таким образом, скрою некоторые несколько эксцентричные рассуждения, фигурировавшие в черновике этой книги. Тому, кто изберет этот путь, естественно изменить утверждение теоремы так, чтобы оно утверждало в точности то, что доказывает доказательство. При этом выясняется, что нет необходимости предполагать глобальную эквивалентность

$$\Omega^\infty X \simeq BSO,$$

достаточно считать, что имеются локальные эквивалентности

$$\Omega^\infty X \mathbb{Z}_{(p)} \simeq BSO\mathbb{Z}_{(p)}$$

(никак между собой не связанные, для каждого простого числа – своя эквивалентность) и, кроме того, что все группы $\pi_r(X)$ конечно порождены (над $\mathbb{Z}$). Аналогично обстоит дело со спектром Y. Однако приведенные выше утверждения проще, и они вполне пригодны для большинства интересных приложений.

Даже если мы решаем не углубляться в дебри стандартной техники локализации, вымучивающей доказательство глобального случая, все же стоит дать формулировку и доказательство одного-двух

более простых и элементарных случаев, чтобы посмотреть, что для этого нужно.

Имея дело с p-локальным или p-полным случаем, мы можем воспользоваться теоремой Адамса и Придди, т.е. теоремой 6.2.1, и заменить "неизвестные" спектры X и Y "известными" спектрами, представляющими различные варианты связной K-теории. Рассмотрим результаты, которые можно получить на этом пути. По-видимому, проще всего начать с комплексного случая, а потом перечислить изменения, которые необходимо произвести при переходе к вещественному случаю; кроме того, видимо, проще начать с изучения операций в стандартной K-теории $K(W)$, а не в $\widetilde{KSU}(W)$. Таким образом, мы приходим к необходимости рассмотрения самых простых и элементарных случаев.

Пусть K – спектр, представляющий классическую периодическую комплексную K-теорию. Методом "убивания гомотопических групп" (см. § 6.2) мы построим спектр $K(0, \ldots, \infty)$, который представляет связную комплексную K-теорию. Он часто обозначается через bu, но я буду обозначать его через ku (по причинам, изложенным в [99] на с. 121). Положим

$$X = ku = K(0, \ldots, \infty).$$

Тогда

$$\Omega^\infty X = \mathbb{Z} \times BU,$$

$$[W, \Omega^\infty X] \cong K(W).$$

Пусть Λ – абелева группа коэффициентов, не имеющая кручения. В основном нас будут интересовать случаи, когда Λ есть $\mathbb{Z}_{(p)}$ – кольцо целых чисел, локализованное по p, или $\mathbb{Z}_p^\wedge$ – кольцо целых p-адических чисел; но это не причина для отказа от рассмотрения других групп. Вводя коэффициенты (см. гл. 3), мы можем построить спектр

$$Y = X\Lambda = ku\Lambda.$$

Например, если $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$, то $Y = X\Lambda = ku\Lambda$ есть локализация спектра $X = ku$ по p. Использование же коэффициентов в $\mathbb{Z}_p^\wedge$ играет ту же роль, которую при других подходах играет пополнение. Другой способ построения спектра $ku\Lambda$ состоит в том, что сначала спектр K при помощи коэффициентов превращается в спектр $K\Lambda$, после чего убивание гомотопических групп дает спектр

$$(K\Lambda)(0, \ldots, \infty);$$

этот спектр эквивалентен спектру $ku\Lambda$. Мы можем написать

$$\Omega^\infty Y = \Lambda \times BU\Lambda$$

и принять это равенство за определение пространства $BU\Lambda$. Далее,

$$[W, \Omega^\infty Y] = K\Lambda(W),$$

где справа стоит K-теория с коэффициентами в Λ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3.4. <u>Теорема 6.3.1 остается справедливой и при таком выборе спектров X и Y; иными словами, отображение</u>

$$\Omega^\infty : [X, Y] \longrightarrow [\Omega^\infty X, \Omega^\infty Y]$$

<u>инъективно.</u>

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3.5. <u>Теорема 6.3.2 остается справедливой и при таком выборе спектров X и Y, если $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ или $\Lambda = \mathbb{Z}_p^\wedge$.</u>

На самом деле здесь достаточно рассматривать накрытия

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1})$$

лишь для того простого p, которое фигурирует в группах $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ или $\Lambda = \mathbb{Z}_p^\wedge$; конечно, r по-прежнему пробегает числа 0, 1, 2,... . Так как в 6.3.5 участвует меньше накрытий, чем в 6.3.2, то разумно доказывать 6.3.5 раньше, чем 6.3.2.

Теперь мы хотим перейти к рассмотрению случаев, когда $\Omega^\infty X$ больше похоже на BSU, чем на $\mathbb{Z} \times BU$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3.6. <u>Теорема 6.3.1 остается справедливой и при следующем выборе спектров:</u>

$$X = K(2n, \ldots, \infty) \quad \text{с любым} \quad n \geqslant 0,$$
$$Y = X\Lambda, \text{ где } \Lambda \text{ не имеет кручения.}$$

Очевидно, что это предложение поглощает предложение 6.3.4 и, кроме того, дает при $n = 2$ желаемый нами результат. Спектр $K(4, \ldots, \infty)$ представляет 3-связную комплексную K-теорию, и его можно обозначить через bsu, поскольку (при $n = 2$)

$$\Omega^\infty X = BSU.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3.7. Теорема 6.3.2 остается справедливой и при следующем выборе спектров:

$$X = K(4, \dots, \infty),$$

$$Y = X\Lambda, \text{ где } \Lambda = \mathbb{Z}_{(p)} \text{ или } \Lambda = \mathbb{Z}_p^{\wedge}.$$

Опять-таки достаточно рассматривать накрытия

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1})$$

лишь для одного простого p.

Теперь мы хотим перейти к вещественной K-теории. Заменим спектр K спектром KO, представляющим классическую периодическую вещественную K-теорию. Методом убивания гомотопических групп можно построить спектр

$$X = KO(2, \dots, \infty),$$

представляющий 1-связную вещественную K-теорию; его можно обозначить через bso, поскольку

$$\Omega^\infty X = BSO.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3.8. Теорема 6.3.1 остается справедливой для спектров $X = bso$ и $Y = bso\Lambda$, где Λ не имеет кручения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3.9. Теорема 6.3.2 остается справедливой для спектров $X = bso$ и $Y = bso\Lambda$, где $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ или $\Lambda = \mathbb{Z}_p^{\wedge}$.

Опять-таки (конечно же) достаточно рассматривать накрытия

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1})$$

лишь для одного простого p.

Теперь я попытаюсь продемонстрировать полезность этих результатов, приведя некоторые следствия, полученные Мадсеном, Снайтом и Торнхэвом. Доказательств здесь я не буду даже намечать.

СЛЕДСТВИЕ 6.3.10. Если $k \not\equiv 0 \bmod p$, то

$$\Psi^k : BSO_{\otimes(p)} \longrightarrow BSO_{\otimes(p)}$$

является бесконечнократным петлевым отображением.

Здесь через $X_{(p)}$ обозначено то, что обозначалось через $X\mathbb{Z}_{(p)}$ в гл. 3 и выше в этом параграфе. Этот результат имеется в [86], теорема 4.5, с. 39. Однако, как заметил Мэй, его можно вывести из теоремы Адамса и Придди без помощи результатов Мадсена, Снэйта и Торнхэва; см. [99], лемма 7.6, с. 132.

СЛЕДСТВИЕ 6.3.11. *Если $k \not\equiv 0 \bmod p$, то*

$$\rho^k : BSO_{\otimes(p)} \longrightarrow BSO_{\otimes(p)}$$

является бесконечнократным петлевым отображением.

Здесь надо сказать, что символ ρ^k может обозначать разные вещи; см. [86], с. 36-37. Я понимаю его, и это естественно, в смысле, объясненном в гл. 5; такое его толкование оправдывается своей полезностью. При такой интерпретации ρ^k следствие 6.3.11 соответствует следствию 4.4 на с. 38 статьи [86]. Другие результаты работы [86], в частности предложение D, с. 4, и теорема 4.3, с. 37, представляют собой разновидности следствия 6.3.11 относящиеся к другим интерпретациям отображения ρ^k.

СЛЕДСТВИЕ 6.3.12. *Отображения*

$$e : F/O \longrightarrow BSO_{\otimes},$$
$$\sigma : F/PL \xrightarrow{\alpha} BSO_{\otimes}\mathbb{Z}[1/2],$$

построенные Сулливаном [145], *являются бесконечнократными петлевыми отображениями.*

См. [86], теорема E, с. 5.

Теперь обратимся к проблеме доказательств. Целью следующих трех параграфов является исследование или объяснение доказательств предложений 6.3.4 - 6.3.9. Проще всего будет сосредоточиться на доказательствах предложений 6.3.4 и 6.3.5, а потом указать изменения или дополнительные аргументы, необходимые для того, чтобы доказать предложения 6.3.6 - 6.3.9.

Предлагаемое мною доказательство предложения 6.3.4 будет приведено в § 6.4; оно отличается от доказательства Мадсена, Снэйта и Торнхэва и опирается на теорему об универсальных коэффициентах; с ее помощью можно доказать и теорему 6.3.3.

Теперь я намечу доказательство предложения 6.3.5. Пусть $A(\Lambda)$ есть множество всех H-отображений

$$\alpha : \mathbb{Z} \times BU \longrightarrow \Lambda \times BU\Lambda,$$

рассматриваемых как аддитивные когомологические операции

$$\alpha\colon K(W) \longrightarrow K\Lambda(W).$$

Структуру множества $A(\Lambda)$ описать очень просто; это сделано в § 6.4 в виде леммы 6.4.1, так как вся предварительная работа проделана в этом параграфе. Эти результаты применимы к любой группе Λ, не имеющей кручения, но с точки зрения остальной части доказательства лучше всего начать с p-адического случая, $\Lambda = \hat{\mathbb{Z}}_p$. (Вывод p-локального случая $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ из p-адического случая $\Lambda = \hat{\mathbb{Z}}_p$ приведен в конце § 6.4.) На самом деле я буду предполагать, что группа коэффициентов Λ полна и хаусдорфова в своей p-адической топологии. Тогда особенно просто описать структуру кольца $K\Lambda(W)$, где $W = B(\mathbb{Z}/p^r)$ или $B(\mathbb{Z}/p^{r+1})$; см. лемму 6.5.1. Затем мы можем найти условия, при которых элемент $\alpha \in A(\Lambda)$ коммутирует с трансферами, отвечающими накрытиям

$$\begin{aligned} B(1) &\longrightarrow B(\mathbb{Z}/p),\\ B(\mathbb{Z}/p) &\longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^2),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ B(\mathbb{Z}/p^{r-1}) &\longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^r). \end{aligned}$$

Нахождению этих условий фактически посвящен § 6.5, и оно также не составляет труда; а именно, элемент $\alpha \in A(\Lambda)$ должен действовать в $B(\mathbb{Z}/p^r)$ так же, как некоторая конечная Λ-линейная комбинация

$$\alpha_r = \sum_{k \not\equiv 0 \bmod p} \lambda_k \Psi^k$$

операций Ψ^k, у которых k взаимно просто с p (см. лемму 6.5.6).

Хорошо известно (и мы это уже упоминали в § 5.1), что $\lambda_k \Psi^k$ есть бесконечнократное петлевое отображение при условии, что для нашей группы коэффициентов Λ отображение $k\colon \Lambda \to \Lambda$ (умножение на k) является изоморфизмом; в нашем случае это имеет место, когда k взаимно просто с p. Отсюда следует, что любая конечная сумма

$$\alpha_r = \sum_{k \not\equiv 0 \bmod p} \lambda_k \Psi^k$$

тоже является бесконечнократным петлевым отображением.

Итак, мы пришли к выводу, что элемент α можно аппроксимировать (в подходящем смысле) элементами α_r и что каждый элемент α_r поднимается до отображения

$$b_r \in [X, Y]$$

одного спектра в другой. Нам, однако, необходимо найти один элемент

$$b \in [X, Y],$$

такой, что $\Omega^\infty b = \alpha$. В этом месте в статьях [86], с. 20, строки 4-5, и [87], с. 410, строки 6-7, авторы говорят о "несложной проблеме сходимости, которую они могут без риска оставить читателю". Читателю всегда лестно знать, что авторы оказывают ему такое доверие. Однако скептически настроенный читатель, возможно, поинтересуется тем, не является ли это утверждение наиболее нуждающимся в доказательстве и не сможет ли он "без риска" оставить "несложную проблему сходимости" авторам. Ввиду этого в § 6.6 я потрачу некоторое время на исследование этой проблемы сходимости. Излишне говорить, что я пришел к неблагодарному выводу, что авторы статьи [86] говорят чистую правду: они могут без риска предоставить эту проблему мне. Я подозреваю, однако, что приводимые мною аргументы сильно отличаются от тех, которые имели в виду авторы этой статьи, и это связано с различием вкусов. Более точно, я думаю, что авторы статьи [86] собирались воспользоваться свойствами "пополнения по Сулливану" или какой-нибудь аналогичной конструкции. Но пополнение по Сулливану фактически представляет собой компактификацию; всюду, где она применима, она приводит к компактным топологиям. При этом компактные топологии чрезвычайно удобны, и я думаю, что именно это обстоятельство и собирались использовать авторы статьи [86]. Однако с общематематической точки зрения компактность не кажется мне ни необходимой, ни уместной; это показывает примитивный пример группы

$$\Lambda = \bigoplus_{1}^{\infty} \hat{\mathbb{Z}}_p,$$

для которой справедливы все приведенные выше результаты, хотя она не является компактной. Однако пополнение здесь в высшей степени уместно. Так как я хочу выяснить, что происходит на самом деле, то я предпочту работать с пополнением, а не с компактификацией, даже если это и удлинит изложение.

§ 6.4. Вычисление групп $[ku, ku\Lambda]$ и доказательство предложения 6.3.4

В этом параграфе я предполагаю, что группа коэффициентов Λ не имеет кручения, но не обязательно полна или хаусдорфова. Цель параграфа состоит в том, чтобы проделать всю работу, использующую лишь предположение об отсутствии кручения, перед тем, как вводить какие бы то ни было другие предположения. Для начала я опишу структуру введенной в § 6.3 группы $A(\Lambda)$. После этого мы обсудим некоторые средства вычисления группы $[ku, ku\Lambda]$, что приведет нас к доказательству предложения 6.3.4. Затем, наконец, я покажу, что в предложении 6.3.5 случай $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ вытекает из случая $\Lambda = \mathbb{Z}_p^{\wedge}$. В промежутках я буду обсуждать пути развития излагаемых методов применительно к другим случаям, упомянутым в 6.3.6 – 6.3.9.

Группа $A(\Lambda)$ была определена как множество H-отображений

$$\alpha\colon \mathbb{Z} \times BU \longrightarrow \Lambda \times BU\Lambda,$$

или, что эквивалентно, как множество аддитивных когомологических операций

$$\alpha\colon K(W) \longrightarrow K\Lambda(W).$$

Для изучения кольца $A(\Lambda)$ мы в качестве пробного пространства возьмем $\mathbb{C}P^{\infty}$. Обозначим через ξ элемент из $K(\mathbb{C}P^{\infty})$, представляемый каноническим комплексным одномерным расслоением над $\mathbb{C}P^{\infty}$, т.е. задаваемый очевидным отображением

$$\mathbb{C}P^{\infty} = BU(1) \longrightarrow BU = 1 \times BU \subset \mathbb{Z} \times BU.$$

Положим $x = \xi - 1$. Тогда $K\Lambda(\mathbb{C}P^{\infty})$ отождествляется с аддитивной группой $\Lambda[[x]]$ формальных степенных рядов $\sum_{i\geq 0} \lambda_i x^i$. Таким образом, всякий элемент $\alpha \in A(\Lambda)$ дает нам формальный степенной ряд

$$\alpha(\xi) = \sum_{i\geq 0} \lambda_i x^i.$$

ЛЕММА 6.4.1. Эта конструкция определяет изоморфизм группы $A(\Lambda)$ на $K\Lambda(\mathbb{C}P^{\infty}) \cong \Lambda[[x]]$.

Это – стандартный результат. См., например, [6], с. 85–87; сделанные там предположения относительно Λ неоправданно ограничительны, но они вряд ли влияют на доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 6.4.2. Любой элемент $\alpha \in A(\Lambda)$ определяется индуцированными им гомоморфизмами гомотопических групп

$$\alpha_*: \pi_{2j}(\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \pi_{2j}(\Lambda \times BU\Lambda) \quad (j \geq 0).$$

Доказательство. Для любого i мы можем построить такой элемент $b_i \in A(\mathbb{Z})$, что

$$b_i(\xi) = x^i.$$

(Это вытекает из леммы 6.4.1, но на самом деле явное построение такого элемента входит в состав доказательства этой леммы. См. [6], с. 86.) Индуцированный гомоморфизм

$$(b_i)_*: \pi_{2j}(\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \pi_{2j}(\mathbb{Z} \times BU)$$

представляет собой умножение на некоторое целое число β_{ij}, которое равно нулю при $j < i$ и отлично от нуля при $j = i$; на самом деле легкое вычисление, использующее характер Чженя, показывает, что

$$\beta_{ii} = i!.$$

Возьмем теперь любой элемент $\alpha \in A(\Lambda)$ и предположим, что

$$\alpha(\xi) = \sum_i \lambda_i x^i;$$

тогда индуцированный гомоморфизм

$$\alpha_*: \pi_{2j}(\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \pi_{2j}(\Lambda \times BU\Lambda)$$

представляет собой умножение на

$$\mu_j = \sum_{i=0}^{j} \lambda_i \beta_{ij}.$$

Так как матрица $[\beta_{ij}]$ невырожденна, то числа μ определяют числа λ. Лемма доказана.

Детали этого доказательства нам еще раз понадобятся в § 6.6.

Изложенные результаты переносятся на вещественный случай. Структура группы $KO\Lambda^0(\mathbb{C}P^\infty)$ известна [15, 123]. Для получе-

ния подходящих "образующих" можно ввести двумерные вещественные расслоения $\eta^{(i)}$ – овеществления комплексных расслоений ξ^i – или, иначе говоря, взять овеществления элементов x^i. Мы можем определить $AO(\Lambda)$ как множество H-отображений

$$\alpha: \mathbb{Z} \times BSO \longrightarrow \Lambda \times BSO\Lambda;$$

возникает изоморфизм

$$AO(\Lambda) \longrightarrow 2\Lambda \oplus \widetilde{KO\Lambda}^0(CP^\infty),$$

действующий по формуле

$$\alpha \longmapsto \alpha(\eta).$$

(Множитель 2 появляется потому, что при аугментации η переходит в 2.) Следствие 6.4.2 в вещественном случае остается верным.

Я уже сказал, что в основу вычисления группы $[ku, ku\Lambda]$ я предполагаю положить теорему об универсальных коэффициентах. Имея это в виду, мы начнем с описания K-гомологических групп $K_*(ku)$.

ЛЕММА 6.4.3. <u>Градуированная группа $K_*(ku)$, расоматриваемая как левый $\pi_*(K)$-модуль, является свободным модулем со счетным множеством образующих, лежащих в нулевой компоненте.</u>

Это будет вытекать из следующей леммы и одного известного результата, на который мы сошлемся.

ЛЕММА 6.4.4. <u>Отображение</u>

$$K_*(ku) \longrightarrow K_*(K)$$

(<u>индуцированное морфизмом</u> $ku \to K$) <u>является мономорфизмом.</u>

Вывод леммы 6.4.3 из леммы 6.4.4. По теореме Адамса и Кларка [11] левый $\pi_*(K)$-модуль $K_*(K)$ является свободным модулем со счетным числом образующих, лежащих в нулевой компоненте. Но $\pi_*(K)$ есть (градуированная) область главных идеалов, поэтому любой подмодуль свободного $\pi_*(K)$-модуля свободен.

Заметим, что метод работы [11] можно, конечно, применить и непосредственно к случаю $K_*(ku)$. Это дает другое доказательство леммы 6.4.3, но не особенно облегчает нам жизнь, потому что лемму 6.4.4 все равно нужно доказывать.

Третья возможность (быть может, менее удобная) основывается на вычислениях по методам, изложенным в книге [9], с. 331–371.

Лемма 6.4.3 остается верной и в вещественном случае: $KO_*(bso)$ есть свободный $\pi_*(KO)$-модуль со счетным числом образующих из нулевой компоненты. Конечно, здесь нельзя пользоваться тем, что подмодуль свободного модуля свободен, так как $\pi_*(KO)$ не есть область главных идеалов; приходится применять метод работы [11] непосредственно к случаю $KO_*(bso)$. Это применение в основном базируется на излагаемых ниже идеях; правда, требуются некоторые дополнительные тонкие рассуждения, связанные с 2-кручением в $\pi_i(KO)$ при $i \equiv 1, 2 \bmod 8$, но мы их опустим.

По-видимому, уместно сказать, что этот метод довольствуется весьма экономным набором данных. Тот факт, что $KO_*(X)$ есть свободный модуль, остается верным для любого спектра X, удовлетворяющего условиям теоремы 6.3.1; достаточно даже потребовать лишь локальных эквивалентностей

$$\Omega^\infty X \mathbb{Z}_{(p)} \simeq BSO\,\mathbb{Z}_{(p)}$$

и условий конечности, состоящих в том, что все группы $\pi_r(X)$ конечно порождены над $\mathbb{Z}$. Так что поле нашей деятельности оказывается не столь уж узким.

Прежде чем доказывать лемму 6.4.4, я хочу расширить ее формулировку. Для этого я напомню полученное в [12] описание группы $K_*(K)$. Оно основано на вложении

$$K_*(K) \longrightarrow K_*(K) \otimes \mathbb{Q},$$

поэтому я должен сначала описать группу $K_*(K) \otimes \mathbb{Q}$. Кольцо $\pi_*(K)$ является кольцом многочленов Лорана $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, где t есть образующая группы $\pi_2(K)$. Отсюда следует, что $K_*(K) \otimes \mathbb{Q}$ есть кольцо многочленов Лорана

$$\mathbb{Q}[u, v, u^{-1}, v^{-1}],$$

где u и v – образы элемента t при отображениях

$$\pi_*(K) = K_*(\Sigma^\infty S^0) \longrightarrow K_*(K),$$

$$\pi_*(K) = (\Sigma^\infty S^0)_*(K) \longrightarrow K_*(K).$$

Группа $K_*(K)$ описывается в [12] как подгруппа конечных $\mathbb{Q}$-линейных комбинаций

$$\sum_{r,s} \lambda_{r,s} u^r v^s \in \mathbb{Q}[u, v, u^{-1}, v^{-1}],$$

удовлетворяющих некоторым условиям целочисленности.

Даже для того, чтобы доказывать лемму 6.4.4, полезно рассмотреть спектры $K(2n,\dots,\infty)$ между K и $ku = K(0,\dots,\infty)$ (по поводу обозначений см. § 6.2).

ЛЕММА 6.4.5. <u>Индуцированное отображение</u>

$$K_*(K(2n,\dots,\infty)) \longrightarrow K_*(K)$$

<u>является мономорфизмом, и его образ есть множество таких сумм</u> $\sum_{r,s} \lambda_{r,s} u^r v^s \in K_*(K)$, <u>что</u> $\lambda_{r,s} = 0$ <u>при</u> $s < n$.

Отсюда, очевидно, следует лемма 6.4.4.

Доказательство леммы 6.4.5. Ясно, что образ группы $K_*(K(2n,\dots,\infty))$ лежит в множестве указанных в лемме сумм, так как $K_*(K(2n,\dots,\infty)) \otimes \mathbb{Q}$ есть множество сумм $\sum_{r,s} \lambda_{r,s} u^r v^s$, в которых s изменяется от n до ∞.

Рассмотрим корасслоение

$$K(2n+2,\dots,\infty) \xrightarrow{i} K(2n,\dots,\infty) \xrightarrow{j} EM(\mathbb{Z},2n),$$

где $EM(\mathbb{Z},2n)$ есть спектр Эйленберга – Маклейна типа $(\mathbb{Z},2n)$. В силу периодичности достаточно рассмотреть случай $n = 0$; мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
K_*(K(2,\dots,\infty)) \arrow[r, "i_*"] & K_*(K(0,\dots,\infty)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & K_*(EM(\mathbb{Z},0)) \arrow[d, "\alpha"] \\
& K_*(K) \arrow[r, "(ch_0)_*"] & K_*(EM(\mathbb{Q},0)) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
& & \pi_*(K) \otimes \mathbb{Q}
\end{tikzcd} \tag{6.4.6}$$

Здесь отображение

$$ch_0 : K \longrightarrow EM(\mathbb{Q}, 0)$$

есть нулевая компонента характера Чженя, а композиция

$$K_*(K) \longrightarrow \pi_*(K) \otimes \mathbb{Q}$$

действует по формулам

$$u^r v^s \longmapsto 0 \quad \text{при } s \neq 0,$$

$$u^r v^s \longmapsto t^r \quad \text{при } s = 0.$$

Отображение α индуцировано очевидным отображением

$$EM(\mathbb{Z}, 0) \longrightarrow EM(\mathbb{Q}, 0),$$

и я начну с доказательства того, что α – изоморфизм. Действительно, по наблюдению Дж. У. Уайтхеда[1)]

$$K_*(EM(\mathbb{Z}/p, 0)) \cong H_*(K; \mathbb{Z}/p),$$

и хорошо известно, что

$$H_*(K; \mathbb{Z}/p) = 0$$

для любого простого p. Переходя к расширениям, мы получаем, что

$$K_*(EM(G, 0)) = H_*(K; G) = 0$$

для любой конечной абелевой группы G. Переходя затем к прямому пределу, мы видим, что аналогичное равенство имеет место для любой периодической группы G и в частности для $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Корасслоение

$$EM(\mathbb{Z}, 0) \longrightarrow EM(\mathbb{Q}, 0) \longrightarrow EM(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 0)$$

дает точную последовательность

$$\ldots \longrightarrow K_*(EM(\mathbb{Z}, 0)) \xrightarrow{\alpha} K_*(EM(\mathbb{Q}, 0)) \longrightarrow K_*(EM(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 0)) = 0;$$

поэтому α есть изоморфизм, что и утверждалось.

[1)] Это наблюдение состоит в том, что $E_*(F) = F_*(E)$ для любых спектров E и F, так как каждая из этих групп есть $\pi_*(E \wedge F)$. – Прим. перев.

Теперь я выведу отсюда эпиморфность гомоморфизма j_* из диаграммы (6.4.6).

Используя вложение $BU(1) \to BU$ и рассматривая BU как второй член спектра ku, мы можем построить элемент из $K_0(ku)$, образ которого в $K_0(\mathbf{K})$ есть

$$\frac{1}{n!}(u^{-1}v-1)(u^{-1}v-2)\dots(u^{-1}v-(n-1)).$$

Это вычисление первоначально было проделано в [12], а затем упрощено в других работах (см., например, [13]). Небольшое отличие наших обозначений от обозначений из [12], с. 407, обусловлено двумя причинами. Во-первых, здесь я считал BU вторым членом спектра, а не нулевым, как в [12]. Во-вторых, я использовал $K_0(\ )$ вместо $K_{2n}(\ )$. Во всяком случае, образ нашего элемента при отображении

$$K_0(\mathbf{K}(0,\dots,\infty)) \longrightarrow \pi_0(\mathbf{K})\otimes \mathbb{Q}$$

есть $(-1)^{n-1}/n$.

Так как это справедливо для любого n, отсюда следует, что гомоморфизм j_* из диаграммы (6.4.6) есть эпиморфизм.

Из точности последовательности

$$K_*(\mathbf{K}(2,\dots,\infty)) \xrightarrow{i_*} K_*(\mathbf{K}(0,\dots,\infty)) \xrightarrow{j_*} K_*(\mathbf{EM}(\mathbb{Z},0))$$

следует теперь, что гомоморфизм i_* является мономорфизмом. В силу периодичности мы получаем, что

$$K_*(\mathbf{K}(2n+2,\dots,\infty)) \longrightarrow K_*(\mathbf{K}(2n,\dots,\infty))$$

есть мономорфизм при всех n.

Рассмотрим теперь спектр $\mathbf{K}$ как предел последовательности спектров

$$\dots \longrightarrow \mathbf{K}(2n+2,\dots,\infty) \longrightarrow \mathbf{K}(2n,\dots,\infty) \longrightarrow \dots .$$

Тогда $K_*(\mathbf{K})$ – прямой предел прямой системы

$$\dots \longrightarrow K_*(\mathbf{K}(2n+2,\dots,\infty)) \longrightarrow K_*(\mathbf{K}(2n,\dots,\infty)) \longrightarrow \dots .$$

Так как это прямая система мономорфизмов, то отображение каждого члена в предел есть мономорфизм. Отсюда следует первое утверждение леммы 6.4.5, которое заодно доказывает леммы 6.4.4 и 6.4.3.

Для завершения доказательства рассмотрим в $K_*(K)$ элемент вида $\sum_{r,s}\lambda_{r,s}u^r v^s$ с $\lambda_{r,s}=0$ при $s<n$. Так как $K_*(K)$ – прямой предел описанной выше системы, то этот элемент приходит из некоторого ее члена, скажем, он есть образ элемента

$$x \in K_*(K(2m,\dots,\infty)).$$

Теперь применим индукцию по m. Если $m<n$, то имеется следующая коммутативная диаграмма, аналогичная диаграмме (6.4.6):

$$\begin{tikzcd}
K_*(K(2m+2,\dots,\infty)) \arrow[r, "i_*"] & K_*(K(2m,\dots,\infty)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d] & K_*(EM(\mathbb{Z},2m)) \arrow[d, "\alpha"] \\
& K_*(K) \arrow[r, "(ch_m)_*"] & K_*(EM(\mathbb{Q},2m)) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
& & \pi_*(K)\otimes\mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

Так как образ элемента x в $K_*(K)$ имеет вид $\sum_{r,s}\lambda_{r,s}u^r v^s$ с $\lambda_{r,s}=0$ при $s<m$, то при отображении в $\pi_*(K)\otimes\mathbb{Q}$ элемент x переходит в 0; поэтому $x\in\ker j_*$ и, значит, $x\in \operatorname{im} i_*$. Этим завершается шаг индукции, и отсюда следует, что наш элемент x приходит из $K_*(K(2n,\dots,\infty))$. Лемма 6.4.5 доказана.

Это рассуждение (являющееся чисто стабильным и имеющее дело с легко описываемыми группами) служит заменой части доказательства Мадсена, Снэйта и Торнхэва, основанной на вычислении K-гомологий пространств Эйленберга – Маклейна.

ЛЕММА 6.4.7. Имеется изоморфизм

$$[ku, K\Lambda]_* \longrightarrow \operatorname{Hom}^*_{\pi_*(K)}(K_*(ku), \pi_*(K\Lambda)),$$

ставящий в соответствие элементу $f\in[ku,K\Lambda]_*=K\Lambda^*(ku)$ гомоморфизм, переводящий $x\in K_*(ku)$ в $\langle f,x\rangle$.

Здесь через $\langle f,x\rangle$ обозначено кронекерово произведение элемента f из $K\Lambda$-когомологий и элемента x из K-гомологий.

Доказательство. Эта лемма представляет собой соответствующий нашей ситуации вариант теоремы об универсальных коэффициентах. Точнее говоря, теорема об универсальных коэффи-

циентах утверждает, что существует спектральная последовательность

$$\mathrm{Ext}^{**}_{\pi_*(K)}(K_*(W), \pi_*(K\Lambda)) \Rightarrow K\Lambda^*(W),$$

в которой краевой гомоморфизм имеет описанный выше вид: он переводит $f \in K\Lambda^*(W)$ в гомоморфизм $K_*(W) \to \pi_*(K\Lambda)$, действующий по формуле $x \mapsto \langle f, x \rangle$. Этот вариант теоремы об универсальных коэффициентах содержится в [6], лекция 1; правда, там ничего не сказано о сходимости этой спектральной последовательности, но ее сходимость может быть доказана с помощью указаний, приведенных в [7], с. 11. Эта спектральная последовательность сходится в том смысле, что она удовлетворяет теореме 8.2 из [9], с. 224. В нашем случае группы $\mathrm{Ext}^{s,*}_{\pi_*(K)}(K_*(ku), \pi_*(K\Lambda))$ тривиальны при $s > 0$ в силу леммы 6.4.3, так что спектральная последовательность вырождается в краевой гомоморфизм[1]. Это доказывает лемму 6.4.7.

Лемма 6.4.7 остается верной и в вещественном случае: имеется изоморфизм

$$[bso, KO\Lambda]_* \longrightarrow \mathrm{Hom}^*_{\pi_*(KO)}(KO_*(bso), \pi_*(KO\Lambda)).$$

Доказательство аналогично.

Другой способ (видимо, менее удобный) вычисления групп $[ku, K\Lambda]_*$ и $[bso, KO\Lambda]_*$ состоит в применении методов работы [14].

СЛЕДСТВИЕ 6.4.8. (a) <u>Нечетные компоненты градуированной группы</u> $[ku, K\Lambda]_*$ <u>тривиальны.</u>

(b) <u>Если для</u> $f \in [ku, K\Lambda]$ <u>гомоморфизмы</u>

$$f_*: \pi_{2s}(ku) \longrightarrow \pi_{2s}(K\Lambda)$$

<u>тривиальны при всех</u> $s \geq 0$, <u>то</u> $f = 0$.

Доказательство. Утверждение (a) непосредственно следует из леммы 6.4.7, поскольку нечетные компоненты граду-

---

1) Являющийся, следовательно, изоморфизмом. - <u>Прим. перев.</u>

ированной группы

$$\mathrm{Hom}^*_{\pi_*(K)}(K_*(ku), \pi_*(K\Lambda))$$

тривиальны по лемме 6.4.3.

Для доказательства утверждения (b) рассмотрим такое отображение $f \in [ku, K\Lambda]$, что любая композиция

$$\Sigma^\infty S^{2s} \xrightarrow{t^s} ku \xrightarrow{f} K\Lambda$$

(где $s \geqslant 0$) тривиальна. Отсюда следует, что в обозначениях леммы 6.4.5

$$\langle f, u^r v^s \rangle = 0 \qquad \text{при} \quad s \geqslant 0.$$

Если x – элемент группы $K_*(ku)$, то по лемме 6.4.5 некоторое его кратное νx можно представить в виде

$$\nu x = \sum_{s \geqslant 0} \lambda_{r,s} u^r v^s,$$

где $\lambda_{r,s} \in \mathbb{Z}$. Тогда $\langle f, \nu x \rangle = 0$ и, значит, $\langle f, x \rangle = 0$, поскольку Λ не имеет кручения. Равенство $f = 0$ следует теперь из леммы 6.4.7. Следствие 6.4.8 доказано.

Утверждение 6.4.8(a) переносится и на вещественный случай в том смысле, что (–1)-я компонента группы $[bso, KO\Lambda]_*$ тривиальна. Доказательство аналогично: образующие $\pi_*(KO\Lambda)$-модуля $KO_*(bso)$ лежат в нулевой компоненте, а (–1)-я компонента кольца $\pi_*(KO\Lambda)$ тривиальна, так что и (–1)-я компонента группы Hom^* тривиальна. Таким способом вообще можно доказывать теоремы типа 6.3.3(a); аналогично обстоит дело и для 6.3.3(b).

Следствие 6.4.8(b) тоже переносится на вещественный случай, только надо сделать очевидную замену группы π_{2s} группой π_{4s}. В частности, отображение $f: bso \to KO\Lambda$ определяется индуцированными гомоморфизмами гомотопических групп. Доказательство аналогично.

Доказательство предложения 6.3.4. Из стандартных свойств связных спектров следует, что отображе-

ние

$$[ku, ku\Lambda] \xrightarrow{\cong} [ku, K\Lambda]$$

является изоморфизмом; кроме того, воздействие отображения f: $ku \to ku\Lambda$ на гомотопические группы определяется воздействием на гомотопические группы отображения $\Omega^\infty f$: $\mathbb{Z}\times BU \to \Lambda \times BU\Lambda$. Поэтому предложение 6.3.4 вытекает из утверждения 6.4.8(b).

Доказательство предложения 6.3.6. Лемма 6.4.3 остается верной при замене спектра ku спектром $K(2n,\ldots,\infty)$ с любым n (потому что нужное утверждение вытекает из этой леммы и периодичности или, если угодно, потому что доказательство леммы 6.4.3 точно так же проходит и в общем случае, фигурирующем в лемме 6.4.5). Поэтому и леммы 6.4.7 и 6.4.8 остаются верными при замене спектра ku любым спектром $K(2n,\ldots,\infty)$; доказательства почти не меняются. Но такая замена превращает доказательство предложения 6.3.4 в доказательство предложения 6.3.6.

Аналогичным образом эти рассуждения проводятся в вещественном случае и доказывают предложение 6.3.8.

ЛЕММА 6.4.9. <u>Если предложение 6.3.5 верно для p-адического случая $\Lambda = \hat{\mathbb{Z}}_p$, то оно верно и для p-локального случая $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$.</u>

Доказательство. Пусть $\alpha \in A(\mathbb{Z}_{(p)})$. Индуцированный гомоморфизм гомотопических групп

$$\alpha_*: \pi_{2s}(\mathbb{Z}\times BU) \longrightarrow \pi_{2s}(\mathbb{Z}_{(p)}\times BU\mathbb{Z}_{(p)})$$

является умножением на некоторое число $\lambda_s \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Мы должны предположить, что α коммутирует с трансфером и что предложение 6.3.5 верно для $\Lambda = \hat{\mathbb{Z}}_p$. Тогда существует такое отображение

$$f: ku \longrightarrow ku\hat{\mathbb{Z}}_p,$$

что $\Omega^\infty f$ совпадает с очевидной композицией

$$\mathbb{Z}\times BU \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{(p)}\times BU\mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}_p \times BU\hat{\mathbb{Z}}_p.$$

Тогда индуцированный гомоморфизм гомотопических групп

$$f_*: \pi_{2s}(ku) \longrightarrow \pi_{2s}(ku\hat{\mathbb{Z}}_p)$$

является умножением на то же самое число $\lambda_s \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Отсюда

следует, что для каждого одночлена $u^r v^s$ имеем[1)]

$$\langle f, u^r v^s \rangle \in \pi_*(K) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Пусть теперь $x \in K_*(ku)$; используя лемму 6.4.5 так же, как мы делали это в доказательстве предложения 6.4.8(b), мы можем написать

$$\nu x = \sum \lambda_{r,s} u^r v^s, \text{ где } \lambda_{r,s} \in \mathbb{Z},$$

и, значит,

$$\langle f, \nu x \rangle \in \pi_*(K) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}.$$

Отсюда следует теперь, что элемент $\langle f, x \rangle$, который *a priori* принадлежал кольцу $\pi_*(K) \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p$, на самом деле принадлежит кольцу $\pi_*(K) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Из леммы 6.4.7 следует теперь, что f пропускается через отображение

$$f' : ku \longrightarrow ku\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Наконец, следствие 6.4.2 показывает, что $\Omega^\infty f' = \alpha$. Лемма 6.4.9 доказана.

Аналогичные рассуждения позволяют вывести случай $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ из случая $\Lambda = \hat{\mathbb{Z}}_p$ и в предложении 6.3.7, но здесь приходится расплачиваться за то, что мы ничего не знаем об аналоге группы $A(\Lambda)$ в $\widetilde{KSU}$-теории. Действительно, в конце наших рассуждений нам потребуется знать, что отображение

$$\alpha : BSU \longrightarrow BSU\mathbb{Z}_{(p)}$$

определяется композицией

$$BSU \xrightarrow{\alpha} BSU\mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow BSU\hat{\mathbb{Z}}_p.$$

Это, однако, легко доказать, используя, например, спектральную последовательность Атьи – Хирцебруха. Я не советую, тем не менее, испытывать эти соображения на BSO для вывода случая $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$ из случая $\Lambda = \hat{\mathbb{Z}}_p$ в предложении 6.3.9; к тому же в вещественном случае я сказал об аналоге группы $A(\Lambda)$ достаточно много.

Вполне понятно, что рассуждения, при помощи которых мы доказывали лемму 6.4.9, применимы не только к случаям групп $\mathbb{Z}_{(p)}$

---

1) В символах π_{2s} и $u^r v^s$ s разные. – Прим. перев.

и $\mathbb{Z}_p^\wedge$; при подходящих предположениях о группе Λ подобное рассуждение проходит для вложения этой группы в ее p-адическое пополнение.

§ 6.5. Вычисления при помощи трансфера

В этом и следующем параграфах я предполагаю, что группа коэффициентов Λ не имеет кручения и что она полна и хаусдорфова в p-адической топологии; например, годится $\Lambda = \mathbb{Z}_p^\wedge$. В этом параграфе я вычислю группу $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$ и продемонстрирую эффект предположения, что элемент $\alpha \in A(\Lambda)$ коммутирует с трансфером. Результаты будут описаны в терминах прямого разложения группы $A(\Lambda)$.

Я начну с вычисления группы $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$. В группе $U(1)$ имеется единственная подгруппа, изоморфная группе $\mathbb{Z}/p^r$; вложение определяет отображение

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow BU(1) = \mathbb{C}P^\infty.$$

Пусть $\xi_r \in K(B(\mathbb{Z}/p^r))$ есть образ элемента $\xi \in K(CP^\infty)$. Этот элемент удовлетворяет соотношению

$$(\xi_r)^{p^r} = 1.$$

ЛЕММА 6.5.1. <u>Элементы ξ_r^i, где i пробегает все вычеты $\mathrm{mod}\, p^r$, составляют Λ-базис в $K\Lambda^0(B(\mathbb{Z}/p^r))$; в то же время</u>

$$K\Lambda^1(B(\mathbb{Z}/p^r)) = 0.$$

Я продолжаю формулировать результаты прежде, чем давать доказательства.

СЛЕДСТВИЕ 6.5.2. <u>Для любого r и любого $\alpha \in A(\Lambda)$ существует такая конечная Λ-линейная комбинация</u>

$$b = \sum_k \lambda_k \Psi^k$$

<u>операций Ψ^k, которая действует так же, как α, в $K(B(\mathbb{Z}/p^r))$, и, на самом деле, в $K(B(\mathbb{Z}/p^{r'}))$ для всех $r' \leq r$.</u>

ЛЕММА 6.5.3. Отображения

$$\ldots \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow BU(1) = CP^\infty$$

индуцируют изоморфизм из $K\Lambda(CP^\infty)$ в $\varprojlim_r K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$.

СЛЕДСТВИЕ 6.5.4. Композиция[1)]

$$A(\Lambda) \longrightarrow \varprojlim_r K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$$

является изоморфизмом.

Доказательство леммы 6.5.1. Мы используем спектральную последовательность Атьи – Хирцебруха. Пусть $R(\mathbb{Z}/p^r)$ есть кольцо представлений группы $\mathbb{Z}/p^r$; оно является свободным $\mathbb{Z}$-модулем и свободно порождается одномерными представлениями группы $\mathbb{Z}/p^r$. Вложение $R(\mathbb{Z}/p^r)$ в $K^0(B(\mathbb{Z}/p^r))$ переводит одномерные представления в элементы ξ_r^i (где i пробегает все вычеты $\mathrm{mod}\, p^r$). Обычная фильтрация пространства $B(\mathbb{Z}/p^r)$ его остовами задает фильтрацию группы $K^0(B(\mathbb{Z}/p^r))$; ограничение этой фильтрации на $R(\mathbb{Z}/p^r)$ дает фильтрацию $R(\mathbb{Z}/p^r)_*$ группы $R(\mathbb{Z}/p^r)$. Факторгруппа

$$R(\mathbb{Z}/p^r)_{2m} / R(\mathbb{Z}/p^r)_{2m+2}$$

есть $\mathbb{Z}$ при $m=0$ и $\mathbb{Z}/p^r$ при $m>0$. Профильтровав группу $\Lambda \otimes R(\mathbb{Z}/p^r)$ подгруппами $\Lambda \otimes R(\mathbb{Z}/p^r)_{2m}$, мы получим сохраняющее фильтрации отображение

$$\Lambda \otimes R(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)).$$

Так как Λ не содержит элементов конечного порядка, то функтор $\Lambda\otimes$ сохраняет точность; поэтому

$$\frac{\Lambda \otimes R(\mathbb{Z}/p^r)_{2m}}{\Lambda \otimes R(\mathbb{Z}/p^r)_{2m+2}} \cong \begin{cases} \Lambda & \text{при } m=0, \\ \Lambda/p^r\Lambda & \text{при } m>0, \end{cases}$$

и эта факторгруппа изоморфно отображается на член E_2 спектральной последовательности Атьи – Хирцебруха[2)]. Эта спектральная последо-

---

1) Отображения $A(\Lambda) \to K(\mathbb{C}P^\infty)$ и изоморфизма леммы 6.5.3. – Прим. перев.

2) Имеется в виду, что группа $E_2^{s,t}$ этой спектральной последовательности изоморфна этой факторгруппе при четных s и t с $s+t=2m$ и равна нулю в остальных случаях. – Прим. перев.

вательность тривиальна, и мы видим, что $K\Lambda^1(B(\mathbb{Z}/p^r)) = 0$, в то время как $K\Lambda^0(B(\mathbb{Z}/p^r))$ есть обратный предел групп[1)]

$$\Lambda\otimes R(\mathbb{Z}/p^r)/\Lambda\otimes R(\mathbb{Z}/p^r)_{2m};$$

иными словами, $K\Lambda^0(B(\mathbb{Z}/p^r))$ есть пополнение группы $\Lambda\otimes R(\mathbb{Z}/p^r)$ по топологии, индуцированной фильтрацией. Далее, $R(\mathbb{Z}/p^r)$ есть прямая сумма группы $\mathbb{Z}$ (порожденной 1) и идеала $\tilde{R}(\mathbb{Z}/p^r)$ – ядра аугментации, – являющегося свободной группой ранга p^r-1; аналогично обстоит дело с $\Lambda\otimes R(\mathbb{Z}/p^r)$. На слагаемом Λ группы $\Lambda\otimes R(\mathbb{Z}/p^r)$ фильтрация тривиальна, а на слагаемом $\Lambda\otimes\tilde{R}(\mathbb{Z}/p^r)$ топология, порожденная фильтрацией, совпадает с p-адической топологией. Так как группа Λ полна и хаусдорфова в p-адической топологии, то пополнение $\Lambda\otimes\tilde{R}(\mathbb{Z}/p^r)$ по топологии, порожденной фильтрацией, есть снова $\Lambda\otimes R(\mathbb{Z}/p^r)$. Это доказывает лемму 6.5.1

Доказательство следствия 6.5.2. Пусть даны $\alpha\in A(\Lambda)$ и некоторое r. Если

$$b = \sum_k \lambda_k \Psi^k,$$

то

$$b(\xi_r) = \sum_k \lambda_k \xi_r^k.$$

По лемме 6.5.1 мы можем подобрать такое b, что $b(\xi_r) = \alpha(\xi_r)$. Имеется отображение $B(\mathbb{Z}/p^r) \to B(\mathbb{Z}/p^r)$, переводящее ξ_r в ξ_r^i, так что по соображениям естественности $b(\xi_r^i) = \alpha(\xi_r^i)$. В силу линейности отображений α и b они совпадут и на любой конечной $\mathbb{Z}$-линейной комбинации

$$\sum_i \mu_i \xi_r^i.$$

Теперь, так как конечные $\mathbb{Z}$-линейные комбинации плотны в топологии, порожденной фильтрацией группы $K(B(\mathbb{Z}/p^r))$, и так как оба отображения α, b непрерывны в этой топологии, то $\alpha x = b x$ для любого $x\in K(B(\mathbb{Z}/p^r))$.

---

1) Можно доказать (см. [17]), что если в спектральной последовательности Атьи – Хирцебруха на каждой клетке $E_2^{s,t}$ почти все дифференциалы тривиальны, то группа $K\Lambda^*(X)$ действительно присоединена к E_∞^{**} (т.е. в ней нет элементов бесконечной фильтрации). – Прим. перев.

Наконец, утверждение о $B(\mathbb{Z}/p^{r'})$ вытекает из эпиморфности отображения

$$K(B(\mathbb{Z}/p^{r'})) \longleftarrow K(B(\mathbb{Z}/p^{r}))$$

и естественности операций α, ℓ. Этим доказано следствие 6.5.2.

Доказательство леммы 6.5.3. Пусть $\mathbb{Z}/p^{\infty}$ есть объединение подгрупп $\mathbb{Z}/p^{r}$ группы $U(1)$. Снабдим $\mathbb{Z}/p^{\infty}$ дискретной топологией; тогда $B(\mathbb{Z}/p^{\infty})$ будет пространством Эйленберга – Маклейна типа $(\mathbb{Z}/p^{\infty}, 1)$. Следовательно, $B(\mathbb{Z}/p^{\infty})$ можно строить как прямой предел пространств $B(\mathbb{Z}/p^{r})$. Так как обратная система

$$\ldots \longleftarrow K\Lambda^*(B(\mathbb{Z}/p^{r})) \longleftarrow K\Lambda^*(B(\mathbb{Z}/p^{r+1})) \longleftarrow \ldots$$

состоит из эпиморфизмов, то отображение

$$\varprojlim_{r} K\Lambda^*(B(\mathbb{Z}/p^{r})) \longleftarrow K\Lambda^*(B(\mathbb{Z}/p^{\infty}))$$

является изоморфизмом. Рассмотрим теперь отображение

$$B(\mathbb{Z}/p^{\infty}) \longrightarrow BU(1);$$

гомологические группы этого отображения – это гомологические группы пары, возникающей при превращении его во вложение, и те из них, которые отличны от нуля, изоморфны $\mathbb{Z}[1/p]$. Так как группа Λ хаусдорфова в p-адической топологии, то

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[1/p], \Lambda) = 0,$$

и несложное вычисление, использующее полноту группы Λ в ее p-адической топологии, показывает, что

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}[1/p], \Lambda) = 0.$$

Из обычной теоремы об универсальных коэффициентах следует, что когомологии нашего отображения равны нулю, т.е. отображение

$$H^*(B(\mathbb{Z}/p^{\infty}); \Lambda) \longleftarrow H^*(\mathbb{C}P^{\infty}; \Lambda)$$

является изоморфизмом. При помощи спектральной последовательности Атьи – Хирцебруха мы выводим из этого, что отображение

$$K\Lambda^*(B(\mathbb{Z}/p^{\infty})) \longleftarrow K\Lambda^*(CP^{\infty})$$

также является изоморфизмом. Этим доказана лемма 6.5.3.

Следствие 6.5.4 вытекает из лемм 6.5.3 и 6.4.1.

Лемма 6.5.1 переносится и на вещественный случай, если мы заменим расслоения ξ_r^i соответствующими двумерными вещественными расслоениями $\eta_r^{(i)}$. Мы должны вспомнить, что $\eta_r^{(i)} = \eta_r^{(-i)}$ и что $\eta_r^{(i)} = \eta_r^{(j)}$ при $i \equiv j \bmod p^r$; поэтому степень i должна пробегать подходящее множество представителей, например $0 \leqslant i \leqslant p^r/2$. Так как все эти расслоения четномерны и ориентируемы, то на самом деле мы получим описание подгруппы $2\Lambda \oplus \oplus \widetilde{KSO}\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$ группы $KO\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$.

Следствия 6.5.2 и 6.5.4 тоже переносятся на вещественный случай.

Остальные результаты этого параграфа переносятся на вещественный случай без серьезных изменений, и я в большинстве случаев не буду упоминать об этом.

Теперь с помощью изоморфизма из следствия 6.5.4 мы можем описать прямое разложение группы $A(\Lambda)$. В обозначениях леммы 6.5.1 зададим прямое разложение группы $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$ формулой

$$\sum_i \lambda_i \xi_r^i \longmapsto \Big(\sum_{i \not\equiv 0 \bmod p} \lambda_i \xi_r^i\Big) + \Big(\sum_{i \equiv 0 \bmod p} \lambda_i \xi_r^i\Big).$$

Очевидно, что это разложение сохраняется при переходе к обратному пределу и задает прямое разложение группы $A(\Lambda)$ вида, скажем

$$\alpha \longmapsto \alpha' + \alpha''. \tag{6.5.5}$$

Здесь α' есть та часть операции α, которая может быть определена при помощи операций Ψ^k с k, взаимно простым с p (и корректного перехода к пределу), в то время как α'' есть та часть операции α, которая может быть определена при помощи операций Ψ^k с k, кратным p (и корректного перехода к пределу). Это прямое разложение обратного предела основано на предположении о полноте и хаусдорфовости группы Λ в ее p-адической топологии и не может быть получено без такого рода предположений.

Теперь ясно, что предложение 6.3.5 будет вытекать из следующих двух результатов.

ЛЕММА 6.5.6. <u>Если</u> $\alpha \in A(\Lambda)$ <u>и если</u> $\alpha \circ Tr = Tr \circ \alpha$ <u>для всех наших накрытий</u> $B(\mathbb{Z}/p^r) \to B(\mathbb{Z}/p^{r+1})$, <u>то</u> $\alpha'' = 0$.

ЛЕММА 6.5.7. <u>Если</u> $\alpha \in A(\Lambda)$ <u>и</u> $\alpha'' = 0$, <u>то</u> $\alpha \in \operatorname{im}\Omega^{\infty}$.

Лемма 6.5.7 будет доказана в § 6.6; наша задача в этом параграфе заключается в доказательстве леммы 6.5.6. Я приступаю к описанию участвующих в ней трансферов.

ЛЕММА 6.5.8. <u>Трансфер, отвечающий накрытию</u>

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1}),$$

<u>переводит</u> ξ_r^i <u>в</u> $\sum \xi_{r+1}^j$, <u>где</u> j <u>пробегает</u> p <u>вычетов</u> $\operatorname{mod} p^{r+1}$, <u>сравнимых с</u> $i \operatorname{mod} p^r$.

Доказательство. Имеется следующая коммутативная диаграмма групп:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p^r & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/p^{r+1} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p \end{array}$$

нижняя стрелка которой есть очевидный эпиморфизм. Она индуцирует следующую коммутативную диаграмму, вертикальные стрелки которой являются накрытиями:

$$\begin{array}{ccc} B(\mathbb{Z}/p^r) & \longrightarrow & B(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B(\mathbb{Z}/p^{r+1}) & \longrightarrow & B(\mathbb{Z}/p) \end{array}$$

Для стоящего справа накрытия мы используем конструкцию Атьи трансфера в K-теории, и мы видим, что $Tr \cdot 1 = \rho$, где ρ - регулярное представление группы $\mathbb{Z}/p$. В силу естественности для стоящего слева накрытия мы получим

$$Tr\, 1 = 1 + \xi_{r+1}^{p^r} + \xi_{r+1}^{2p^r} + \ldots + \xi_{r+1}^{(p-1)p^r}.$$

Для $Tr(\xi_r^i)$ требуемый результат вытекает теперь из мультипликативности трансфера[1], так как $\xi_r^i \in K(B(\mathbb{Z}/p^r))$ есть образ элемента $\xi_{r+1}^i \in K(B(\mathbb{Z}/p^{r+1}))$.

---

[1] Как следует из коммутативности диаграммы после утверждения (4.3.5), $Tr(xf^*y) = Tr\,x f(y)$ для любого накрывающего отображения f. - <u>Прим.перев.</u>

Лемма 6.5.8 позволяет нам узнать, в какой мере наши операции коммутируют с трансфером. Рассмотрим разложение (6.5.5)

$$\alpha \longmapsto \alpha' + \alpha''.$$

ЛЕММА 6.5.9. <u>Трансфер, отвечающий накрытию</u>

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1}),$$

<u>удовлетворяет соотношению</u>

$$(\alpha \mathrm{Tr} - \mathrm{Tr}\,\alpha)\xi_r^i = p\alpha''\xi_{r+1}^i - \mathrm{Tr}\,\alpha''\xi_r^i.$$

Доказательство. Достаточно доказать эту формулу для $i = 1$, а потом воспользоваться естественностью. Эта формула линейна по α и зависит лишь от действия α в пространствах $B(\mathbb{Z}/p^r)$ и $B(\mathbb{Z}/p^{r+1})$; поэтому, согласно следствию 6.5.2, достаточно доказать ее для $\alpha = \Psi^k$. Пусть сначала $k \equiv 0 \bmod p$, так что $\alpha'' = \Psi^k = \alpha$. Тогда

$$\Psi^k \mathrm{Tr}\,\xi_r = \Psi^k\left(\sum_{l=0}^{p-1} \xi_{r+1}^{1+lp^r}\right) = \sum_{l=0}^{p-1} \xi_{r+1}^{k+klp^r} =$$

$$= p\xi_{r+1}^k \,(\text{так как } kp^r \equiv 0 \bmod p^{r+1}) = p\Psi^k\xi_{r+1}.$$

Если же $k \not\equiv 0 \bmod p$, то $\alpha'' = 0$, так что правая часть формулы равна нулю; можно провести те же вычисления, что и для случая $k \equiv 0 \bmod p$, но проще сказать, что операция $\alpha = \Psi^k$ лежит в $\mathrm{im}\,\Omega^\infty$ и поэтому $\alpha \mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}\,\alpha$. Лемма доказана.

Применяя лемму 6.5.9 к операциям α' и α'', мы можем разложить ее на две формулы:

$$\alpha' \mathrm{Tr}\,\xi_r^i = \mathrm{Tr}\,\alpha'\xi_r^i,$$

$$\alpha'' \mathrm{Tr}\,\xi_r^i = p\alpha''\xi_{r+1}^i.$$

Эти формулы останутся верными при замене элемента ξ_{r+1}^i любым элементом $x \in K(B(\mathbb{Z}/p^{r+1}))$, а элемента ξ_r^i – образом элемента x в группе $K(B(\mathbb{Z}/p^r))$; нам нет необходимости доказывать это.

Доказательство леммы 6.5.6. Предположим, что $\alpha \in A(\Lambda)$ коммутирует с трансфером во всех наших накрытиях. Предположим сначала, что $\alpha''(1) = \lambda 1$, где $\lambda \in \Lambda$. Применяя лемму 6.5.9 к накрытию

$$B(1) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p)$$

и полагая $i = 0$, мы получим

$$(\alpha Tr - Tr\alpha)1 = p\alpha''1 - Tr\alpha''1 = \lambda\left(p - \sum_{l=0}^{p-1} \xi_1^l\right),$$

так что обязательно $\lambda = 0$. Предположим теперь по индукции, что в $B(\mathbb{Z}/p^r)$ имеет место равенство $\alpha''\xi_r = 0$; индукция начинается со случая $r = 0$, в котором наше утверждение истинно в силу сказанного выше. Рассмотрим накрытие

$$B(\mathbb{Z}/p^r) \longrightarrow B(\mathbb{Z}/p^{r+1});$$

из леммы 6.5.9 вытекает, что

$$p\alpha''\xi_{r+1} - Tr\,\alpha''\xi_r = 0.$$

Но $Tr\,\alpha''\xi_r = 0$ по предположению индукции, так что $p\alpha''\xi_{r+1} = 0$. Так как по лемме 6.5.1 группа $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^{r+1}))$ не имеет кручения, то $\alpha''\xi_{r+1} = 0$. Шаг индукции завершен и, значит, $\alpha''\xi_r = 0$ для всех r. Теперь из следствия 6.5.4 вытекает, что $\alpha'' = 0$, и лемма 6.5.6 доказана.

Вывод предложения 6.3.7 из предложения 6.3.5 для $\Lambda = \mathbb{Z}_p^\wedge$. Нам опять предстоит расплачиваться за наше невнимание к группе SU.

Пусть дана аддитивная когомологическая операция

$$\alpha\colon [W, BSU] \longrightarrow [W, BSU\Lambda],$$

где $\Lambda = \mathbb{Z}_p^\wedge$. Согласно [10], имеется единственная когомологическая операция b, включаемая в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} [W, BSU] & \xrightarrow{\alpha} & [W, BSU\Lambda] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [W, BU] & \xrightarrow{b} & [W, BU\Lambda] \end{array}$$

Далее, если операция α коммутирует с трансфером для всех наших накрытий, то это верно и для операции b; действительно, если

$x \in [B(\mathbb{Z}/p^r), BU]$, то $p^r x$ есть образ некоторого элемента $y \in [B(\mathbb{Z}/p^r), BSU]$, поэтому равенство $\alpha \operatorname{Tr} y = \operatorname{Tr} \alpha y$ влечет за собой равенство

$$b \operatorname{Tr} p^r x = \operatorname{Tr} b p^r x$$

и, значит, равенство $b \operatorname{Tr} x = \operatorname{Tr} b x$ ввиду отсутствия кручения в $[B(\mathbb{Z}/p^{r+1}), BU\Lambda]$.

Имеется много операций c, включаемых в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{[W, BU]} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & {[W, BU\Lambda]} \arrow[d] \\
{[W, \mathbb{Z} \times BU]} \arrow[r, "c"] & {[W, \Lambda \times BU\Lambda]}
\end{tikzcd}$$

Чтобы построить такую операцию, нужно, в сущности, только выбрать скаляр λ с

$$c 1 = \lambda 1.$$

Однако имеется одна и только одна такая операция c, коммутирующая с трансферами во всех наших накрытиях. Более точно, так как на элементах из ядра аугментации c уже коммутирует с трансферами, то для коммутирования c с трансферами необходимым и достаточным является равенство

$$c \operatorname{Tr} 1 = \operatorname{Tr} c 1.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 6.5.6, мы видим, что необходимым и достаточным для этого является равенство $c'' 1 = 0$. Но в тривиальном случае мы имеем $(\Psi^0)'' = \Psi^0$; следовательно, имеется одно и только одно значение λ, гарантирующее равенство $c'' 1 = 0$.

Считая верным предложение 6.3.5, мы получаем отображение

$$f : K(0, \ldots, \infty) \longrightarrow (K(0, \ldots, \infty))\Lambda,$$

для которого $\Omega^\infty f = c$. Отображение f задает отображение

$$g : K(4, \ldots, \infty) \longrightarrow (K(4, \ldots, \infty))\Lambda.$$

Для доказательства равенства $\Omega^\infty g = \alpha$ достаточно проверить, что α определяется композицией

$$BSU \xrightarrow{\alpha} BSU\Lambda \longrightarrow \Lambda \times BU\Lambda,$$

а это непосредственно следует из того, что $BSU\Lambda$ является ретрактом пространства $\Lambda \times BU\Lambda$. Доказательство закончено.

Соображения, связанные с переходом от b к c, хорошо работают и в вещественном случае.

§ 6.6. Несколько слов о сходимости

Целью этого параграфа является доказательство леммы 6.5.7. Я проведу его для комплексного случая; в вещественном случае серьезных отличий не возникает.

Естественно прежде всего обсудить возможные способы топологизации множеств $[ku, ku\Lambda]$ и $A(\Lambda)$. Тончайшая из разумных топологий в $[ku, ku\Lambda]$ есть "топология фильтрации", в которой типичная окрестность нуля состоит из морфизмов $f: ku \to ku\Lambda$, имеющих тривиальное ограничение на остов ku^n; как тополог, я, быть может, *a priori* предпочитаю именно эту топологию.

С другой стороны, рассмотрим композицию

$$[ku, ku\Lambda] \xrightarrow{\Omega^\infty} A(\Lambda) \longrightarrow K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))^{1)}.$$

Хочется, конечно, чтобы она была непрерывной. Очевидной топологией в $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$, отвечающей этому требованию, является опять-таки топология фильтрации, в которой окрестностями нуля являются ядра

$$\ker[K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)) \longrightarrow K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)^n)].$$

Конечно, было бы неразумным надеяться, что указанная выше композиция останется непрерывной и для любой более тонкой топологии в $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$. Но группа $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$ разлагается в прямую сумму группы Λ (не создающей никаких проблем) и ядра аугментации, $\widetilde{K\Lambda}(B(\mathbb{Z}/p^r))$; на последнем топология фильтрации совпадает с p-адической топологией, в которой x считается достаточно близким к нулю, если

$$x \equiv 0 \bmod p^n$$

---

1) Отображение $A(\Lambda) \to K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$ имеет вид $A(\Lambda) = K\Lambda(CP^\infty) = K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^\infty)) = K\Lambda(B(\underset{r}{\underline{\lim}}\, \mathbb{Z}/p^r)) \to \underset{r}{\underline{\lim}}\, K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)) \to K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$. - Прим.перев.

для достаточно большого n. С алгебраической точки зрения p-адическая топология проще и удобнее, так что представляется разумным ввести p-адическую топологию во всю группу $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$.

Очевидная топология, которую можно ввести в

$$A(\Lambda) = \varprojlim_r K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)),$$

есть топология обратного предела p-адических топологий в членах $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$. Я буду называть такую топологию <u>предельной</u>; это – одна из топологий, очевидным образом связанных с вычислениями § 6.5, включающими трансфер. Возможны, однако, и другие определения, столь же разумные и приводящие фактически к той же самой топологии. Во-первых, вспомним изоморфизм

$$A(\Lambda) \xrightarrow{\cong} K\Lambda(CP^\infty) = \Lambda[[x]]$$

из леммы 6.4.1. Мы можем топологизировать $\Lambda[[x]]$, считая типичной окрестностью нуля множество таких формальных степенных рядов $\sum_i \lambda_i x^i$, что

$$\lambda_i \equiv 0 \bmod p^n \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant m.$$

Такую топологию я буду называть <u>топологией рядов</u>.

Во-вторых, мы можем топологизировать $A(\Lambda)$, считая типичной окрестностью нуля множество таких отображений

$$\alpha\colon \mathbb{Z} \times BU \longrightarrow \Lambda \times BU\Lambda,$$

что гомоморфизмы

$$\alpha_*\colon \pi_{2i}(\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \pi_{2i}(\Lambda \times BU\Lambda)$$

сравнимы с нулем по модулю p^n при $0 \leqslant i \leqslant m$. Эту топологию я буду называть <u>π_*-топологией</u>; это – топология, наиболее очевидным образом связанная со строением группы $[ku, ku\Lambda]$.

Разумеется, так как мы имеем дело исключительно с K-теорией таких простых пространств, как $B(\mathbb{Z}/p^r)$ и $\mathbb{C}P^\infty$, то между этими тремя топологиями должна быть простая связь.

ЛЕММА 6.6.1. <u>Все три топологии в $A(\Lambda)$ совпадают.</u>

Для наших целей достаточно знать, что предельная топология тоньше π_*-топологии; но было бы глупо пройти мимо окончательного результата.

Я повремено с доказательством леммы 6.6.1 и закончу мои объяснения. Я опишу теперь несколько топологий в множестве $[ku, ku\Lambda]$. Первая такая топология естественно возникает из нашего анализа группы $A(\Lambda)$: типичная окрестность нуля состоит из таких отображений $f: ku \to ku\Lambda$, что гомоморфизмы

$$f_*: \pi_{2i}(ku) \longrightarrow \pi_{2i}(ku\Lambda)$$

сравнимы с нулем по модулю p^n при $0 \leqslant i \leqslant m$. В силу сказанного выше и предложения 6.3.4 это означает, что множество $[ku, ku\Lambda]$ топологизируется как подгруппа группы $A(\Lambda)$, в которую оно вкладывается посредством Ω^∞.

Второй топологией является p-адическая топология, естественно возникающая в группе

$$\mathrm{Hom}^*_{\pi_*(K)}(K_*(ku), \pi_*(K\Lambda))$$

из леммы 6.4.7. Для описания типичной окрестности нуля возьмем конечное множество элементов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ из $K_*(ku)$ и определим типичную окрестность V нуля как множество таких $f \in K\Lambda^*(ku)$, что все числа

$$\langle f, x_1 \rangle, \ \langle f, x_2 \rangle, \ \ldots, \ \langle f, x_m \rangle$$

делятся на p^n. Я буду называть такую топологию K_*-топологией.

ЛЕММА 6.6.2. Определенная выше π_*-топология в $[ku, ku\Lambda]$ совпадает с K_*-топологией.

Конечно, надо отметить, что обе эти топологии строго грубее, чем топология фильтрации, с которой я начал это обсуждение.

Я отложу и доказательство леммы 6.6.2 до окончания моих объяснений. Оправданием лемм 6.6.1 и 6.6.2 служит их использование в следующем рассуждении.

Вывод леммы 6.5.7 из лемм 6.6.1 и 6.6.2. Рассмотрим в $A(\Lambda)$ элемент α', лежащий в подпространстве $\alpha'' = 0$. Из определения разложения (6.5.5) видно, что α' аппроксимируется конечными суммами

$$\alpha'_r = \sum_{k \not\equiv 0 \bmod p} \lambda_k \Psi^k;$$

эти суммы α'_r лежат в $\mathrm{im}\,\Omega^\infty$ и сходятся к α' в предельной то

пологии группы $A(\Lambda)$. По лемме 6.6.1 предельная топология совпадает с остальными топологиями в $A(\Lambda)$. Отождествим $[ku, ku\Lambda]$ с подгруппой $\operatorname{im}\Omega^\infty$ группы $A(\Lambda)$. Из леммы 6.4.7 следует, что группа $[ku, ku\Lambda]$ полна в K_*-топологии, а по лемме 6.6.2 K_*-топология совпадает с топологией, индуцированной в $\operatorname{Im}\Omega^\infty$ топологией группы $A(\Lambda)$. Отсюда вытекает, что последовательность α'_r сходится и в $\operatorname{im}\Omega^\infty$ и, значит, $\alpha' \in \operatorname{im}\Omega^\infty$. Этим доказана лемма 6.5.7.

Доказательство леммы 6.6.2. Пусть V – окрестность в π_*-топологии, состоящая из таких f, что

$$f_*: \pi_{2i}(ku) \longrightarrow \pi_{2i}(ku\Lambda)$$

сравнимо с нулем по модулю p^n при $0 \leqslant i \leqslant m$. Это равносильно тому, что

$$\langle f, v^i \rangle \equiv 0 \mod p^n \text{ при } 0 \leqslant i \leqslant m,$$

так что V является окрестностью и в K_*-топологии.

Обратно, пусть V – некоторая окрестность в K_*-топологии; достаточно рассматривать окрестность, определяемую каким-либо одним элементом $x \in K_*(ku)$ и состоящую, следовательно, из таких $f \in K\Lambda^*(ku)$, что $\langle f, x \rangle \equiv 0 \mod p^n$. Элемент x можно представить в виде конечной линейной комбинации

$$\sum_{r,s} \mu_{r,s} u^r v^s,$$

где $\mu_{r,s} \in \mathbb{Q}$ и $s \geqslant 0$; мы можем считать, что в сумму входят лишь члены с $0 \leqslant s \leqslant m$. Рассматривая общий знаменатель коэффициентов $\mu_{r,s}$, мы можем написать, что

$$p^t x = \sum_{r,s} \nu_{r,s} u^r v^s,$$

где $\nu_{r,s} \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Задав окрестность V' в π_*-топологии сравнениями

$$\langle f, v^s \rangle \equiv 0 \mod p^{n+t} \text{ при } 0 \leqslant s \leqslant m,$$

мы видим, что из $f \in V'$ следует $f \in V$, т.е. $V' \subset V$. Этим доказана лемма 6.6.2.

Доказательство леммы 6.6.1. Сначала я докажу, что топология рядов совпадает с π_*-топологией.

Вспомним, что в доказательстве следствия 6.4.2 была установлена такая связь коэффициентов ряда

$$\alpha(\xi) = \sum_i \lambda_i x^i$$

и индуцированных гомоморфизмов

$$\alpha_*: \pi_{2j}(\mathbb{Z} \times BU) \longrightarrow \pi_{2j}(\Lambda \times BU\Lambda);$$

последние представляют собой умножения на числа $\mu_j = \sum_{i=0}^{j} \lambda_i \beta_{ij}$, где $\beta_{ij} \in \mathbb{Z}$. Поэтому если для чисел λ справедливы сравнения

$$\lambda_i \equiv 0 \bmod p^n \quad \text{при} \quad 0 \leq i \leq m,$$

то

$$\mu_j \equiv 0 \bmod p^n \quad \text{при} \quad 0 \leq j \leq m.$$

Обратно, пусть p^t есть p-примарный множитель числа

$$\det_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m}} (\beta_{ij}) = 1!\,2!\,3!\ldots m!;$$

если для чисел μ справедливы сравнения

$$\mu_j \equiv 0 \bmod p^{n+t} \quad \text{при} \quad 0 \leq j \leq m,$$

то

$$\lambda_i \equiv 0 \bmod p^n \quad \text{при} \quad 0 \leq i \leq m.$$

Отсюда следует, что топология рядов совпадает с π_*-топологией.

Теперь я докажу, что топология рядов тоньше предельной топологии. Пусть дана окрестность V нуля в предельной топологии, состоящая, скажем, из таких $\alpha \in A(\Lambda)$, что

$$\alpha(\xi_r) \equiv 0 \bmod p^n \quad \text{в} \quad K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)).$$

В кольце $K(B(\mathbb{Z}/p^r))$ имеет место равенство $(\xi_r)^{p^r} = 1$,

из которого следует, что

$$(x_r)^{p^r} = (\xi_r - 1)^{p^r} = py$$

для некоторого подходящего y. Возведя это равенство в степень n, мы получим

$$(x_r)^{np^r} = p^n y^n.$$

Поэтому если

$$b(\xi) = \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i x^i,$$

где $m = np^r$, то обязательно $b(\xi_r) = p^n z$ для некоторого подходящего z. Запишем

$$\alpha(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i;$$

сравнения

$$\lambda_i \equiv 0 \bmod p^n \text{ при } 0 \leqslant i < m = np^r$$

задают окрестность нуля в топологии рядов, и из сказанного выше следует, что α лежит в V [1].

Наконец, я докажу, что предельная топология тоньше топологии рядов. Пусть дана окрестность V нуля в топологии рядов, состоящая, скажем, из таких α, что

$$\alpha(\xi) = \sum_i \lambda_i x^i,$$

где

$$\lambda_i \equiv 0 \bmod p^n \quad \text{при} \quad i \leqslant m.$$

Индукцией вниз по k мы построим число $r = r(k)$ со следующим свойством: если

$$b(\xi) = \sum_{i \geqslant k} \mu_i x^i$$

---

[1] Действительно, $\alpha(\xi) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i x^i + b(\xi)$, где $b(\xi) = \sum_{i=m}^{\infty} \lambda_i x^i$. Выражение $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i (x_r)^i$ делится на p^n согласно условию на λ, а $b(\xi_r)$ делится на p^n в силу сказанного выше. – <u>Прим. перев.</u>

и $b(\xi_r)$ переходит в нуль в $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)^{2m})$, то $b \in V$. Индукция тривиальным образом начинается с $k = m+1$ или с $k = m$ и $r = n$. Предположим, что построено число $r = r(k+1)$, где $1 \leq k \leq m$. Так как $\tilde{K}(B(\mathbb{Z}/p^r)^{2m})$ аннулируется умножением на p^{rm}, то можно найти такую степень p^s числа p, что элемент $(\xi_r - 1)^k = (x_r)^k$ аннулируется в $K(B(\mathbb{Z}/p^r)^{2m})$ умножением на p^s. Положим

$$r' = r(k) = \max(n, r, s).$$

Если

$$b(\xi) = \sum_{i \geq k} \mu_i x^i$$

и $b(\xi_{r'})$ переходит в нуль в $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^{r'})^{2m})$, то, рассматривая член наименьшей фильтрации, мы видим, что $\mu_k \equiv 0 \mod p^{r'}$. Рассмотрим теперь такую операцию c, что

$$c(\xi) = \sum_{i \geq k+1} \mu_i x^i.$$

Очевидно, что $c(\xi_r)$ переходит в нуль[1] в $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)^{2m})$; поэтому по предположению индукции $c \in V$. Отсюда следует, что $b \in V$ [2], и шаг индукции завершен.

Индукция заканчивается на $k = 1$; при этом получается такое r, что если для операции b

$$b(\xi) = \sum_{i \geq 1} \mu_i x^i$$

и $b(\xi_r)$ переходит в нуль в $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)^{2m})$, то $b \in V$. Сделаем последний шаг. Подберем такое s, что p^s аннулирует группу $\widetilde{K\Lambda}(B(\mathbb{Z}/p^r)^{2m})$, например годится $s = rm$. Положим $N = \max(s, n)$, и пусть V' есть множество таких $a \in A(\Lambda)$, что

---

[1] Действительно, $c(\xi_r) = b(\xi_r) - \mu_k (x_r)^k$, но $\mu_k (x_r)^k = 0$, так как $\mu_k \equiv 0 \mod p^{r'}$ и $r' \geq s$, а $b(\xi_r)$ переходит в нуль в $\tilde{K}\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r)^{2m})$, поскольку $r' \geq r$ и $b(\xi_{r'})$ переходит в нуль в $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^{r'})^{2m})$. – Прим. перев.

[2] Действительно, $b(\xi) = c(\xi) + \mu_k x^k$, но $\mu_k \equiv 0 \mod p^n$, поскольку $\mu_k \equiv 0 \mod p^{r'}$ и $r' \geq n$, а $\mu_j \equiv 0 \mod p^n$ при $k+1 \leq j \leq m$, поскольку $c \in V$. – Прим. перев.

$\alpha(\xi_r)$ делится на p^N в $K\Lambda(B(\mathbb{Z}/p^r))$. Тогда V' является окрестностью нуля в предельной топологии, и $V' \subset V$.

Этим завершается доказательство леммы 6.6.1, а вместе с ним завершаются доказательства предложений 6.5.7 и 6.3.5.

Читателю, которому третья часть доказательства леммы 6.6.1 показалась стрельбой из пушек по воробьям, мы настоятельно советуем изучить нетривиальные расширения в $\tilde{K}(B(\mathbb{Z}/p^r)^{2m})$ для частных значений $r>1$ и $m>1$.

Глава 7

СЕГОДНЯШНЕЕ СОСТОЯНИЕ ПРЕДМЕТА

§ 7.1. Обзор

В этой главе я попытаюсь коротко и, вероятно, совершенно неадекватным образом обрисовать нынешнее положение дел в нашей области.

По-видимому, лучше всего продолжить разговор, начатый в § 1.8. Как было сказано, для изучения топологии многообразий топологам необходимо, в частности, исследовать следующую последовательность групп и гомоморфизмов:

$$K_O(X) \longrightarrow K_{PL}(X) \longrightarrow K_{Top}(X) \longrightarrow K_F(X).$$

Другими словами, мы хотим рассмотреть представляющие пространства

$$BO, \quad BPL, \quad BTop, \quad BF$$

вместе с соответствующими факторпространствами, проанализировать или представить их как бесконечнократные пространства петель от более элементарных частей. Конечно, желательно анализировать не только объекты, но и отображения; в идеале хотелось бы иметь список отображений, в котором каждое геометрически важное отображение встречается ровно один раз, и указатель, в котором были бы кратко обрисованы все ранее построенные интересные отображения и указывалось их место в главном списке. В то время, когда я читал эти лекции, мне казалось, что такой уровень систематизации этого предмета не скоро будет достигнут. Сейчас (9/IX 1977) в этом направлении имеется значительный прогресс. В этом можно убедиться, обратившись, например, к работе [99]. Оказалось, в частности, возможным доказать, что отображение, построенное при помощи "дискретных моделей", согласуется с отображением, построенным другими методами.

Вернемся к проекту "анализа объектов". Как уже говорилось в гл.5, гомотопическими группами пространства BF служат стабильные гомотопические группы сфер, и поэтому они очень сложны. Однако после локализации по нечетному простому числу стабильные гомотопические группы сфер расщепляются в прямую сумму вида

$$\pi_n^S(S^0) \cong (\operatorname{im} J)_n \oplus (\operatorname{coker} J)_n.$$

Это можно вывести из приведенных в гл. 5 результатов. Поэтому мы вынуждены смириться с перспективой построения единого пространства или спектра, гомотопическими группами которого являются группы $\operatorname{coker} J$. И этому пространству или спектру мы вверяем все нерешенные проблемы теории гомотопий. Любое пространство или спектр, задуманное и созданное для этого, можно назвать $\operatorname{coker} J$. Конечно, авторы, которые в чрезмерном рвении задумают и создадут несколько таких объектов или будут рассматривать один и тот же объект с разных точек зрения, могут добавить к этому обозначению нижние и верхние индексы и другие украшения.

Небольшая аномалия возникает при локализации по простому числу 2. Группа $\pi_n^S(S^0)$ по-прежнему расщепляется в прямую сумму "известной части", связанной с K-теорией, и "неизвестной части", однако описание "известной части" должно быть несколько другим. Помимо образа классического J-гомоморфизма эта часть содержит прямые слагаемые $\mathbb{Z}/2$, порожденные элементами μ_r при $r \equiv 1, 2 \bmod 8$ [5]. Эти факты хорошо известны топологам и любимы ими, но вряд ли трогают кого-нибудь еще.

Возвращаясь вновь к проекту "анализа объектов", приходится признать нерадостную перспективу введения грубого объекта $\operatorname{coker} J$. Хотелось бы жестко управлять всеми оставшимися компонентами нашего разложения, и на практике это пока что означает, что они должны быть тесно связанными с известными спектрами, представляющими варианты связной K-теории. (Когда я говорю "тесно связаны", я имею в виду, что допускаются такие конструкции, как корасслоения, возникающие из известных отображений между известными спектрами K-теорий.) Поэтому результат типа изложенного в гл. 6 позволяет надеяться, что отображения между такими спектрами поддаются управлению. См. об этом [69], теорема 6.1 (хотя я не очень доверяю некоторым p-адическим результатам этого препринта), или [70], теорема 9.3 на с. 232, теорема 9.9 на с.236.

Получить хорошее представление о достигнутом в этой области прогрессе можно, сравнив проблемы, поставленные в [95], с результатами, полученными в [99]. Конкретные проблемы рассматриваемого мною типа я могу разделить по трем уровням.

На первом, простейшем уровне Мэй сформулировал в [95] проблему 6: "Когда H-отображение одного бесконечнократного пространства петель, гомотопически эквивалентного локализованному или пополненному по p пространству BSO, в другое такое пространство является бесконечнократным петлевым отображением?"

Мы уже видели, что именно эту проблему решили Мадсен, Снэйт и Торнхэв. И как я и предполагал, нам теперь не очень страшны проблемы этого уровня.

Теперь я перейду к формулировке двух проблем второго, промежуточного уровня.

ВОПРОС 7.1.1. Атья, Ботт и Шапиро в [19] снабдили $Spin$-расслоения KO-ориентацией, т.е. задали естественное преобразование

$$K_{Spin}(X) \xrightarrow{\sigma} K_{Spin;\,KO}(X),$$

для которого $\pi\sigma = 1$, где $K_{Spin;\,KO}(X)$ есть группа Гротендика $Spin$-расслоений с фиксированной KO-ориентацией, а отображение

$$\pi : K_{Spin;\,KO}(X) \longrightarrow K_{Spin}(X)$$

есть забывание этой ориентации. Продолжается ли σ до естественного преобразования σ теорий когомологий, такого что $\pi\sigma = 1$?

ВОПРОС 7.1.2. Этот вопрос аналогичен вопросу 7.1.1, только ориентация Атьи, Ботта и Шапиро заменяется ориентацией Сулливана $STop$-расслоений над $KO\mathbb{Z}[1/2]$ (см. [149], § 6).

Эти два вопроса являются гипотезами 2 и 3 работы [95]. На эти вопросы, правда в слегка измененном виде, получены положительные ответы; однако этих ответов нам вполне достаточно, поскольку они позволяют достичь исходную цель. Изменение состоит в следующем: соотношения типа $\pi\sigma = 1$ выполняются не в группе $K_{Spin;\,KO}(X)$, а в группе $K_{SF}(X)$, определяемой при помощи сферических расслоений, а не $Spin$-расслоений (см. § 1.8). Подробности см. в [99], теорема 7.11, с. 135, теорема 7.16, с. 137.

Теперь я перехожу к формулировке единственной проблемы третьего, самого глубокого уровня, которая связана с вариантом обсуждавшейся в гл. 5 гипотезы Адамса для бесконечнократных пространств петель.

Сначала сформулируем комплексный вариант этой гипотезы. Допустим, что отображение

$$\widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}_{SF}(X)$$

продолжается до естественного преобразования теорий когомологий, которое соответствует отображению спектров

$$bu \longrightarrow BSF.$$

ВОПРОС 7.1.3. Гомотопна ли композиция

$$bu \xrightarrow{\Psi^k - 1} bu\mathbb{Z}[1/k] \longrightarrow BSF\mathbb{Z}[1/k]$$

нулю в смысле отображений спектров?

Это – гипотеза 1 из [95]. Недавно она доказана в двух независимых работах, в работе Фридлэндера [61] и работе Сеймура [132] (см. также [164*], [167*]. – Перев.). В основу методов Фридлэндера положен метод Сулливана этальной гомотопической теории в алгебраической геометрии; они требуют подгонки этого метода и машинерии гл. 2 до их согласования. Методы Сеймура заключаются в геометрическом построении теории когомологий, представленной гомотопическим слоем отображения $\Psi^k - 1$, такой, как в [131].

ВОПРОС 7.1.4. Каков должен быть вещественный аналог вопроса 7.1.3 при простом $p = 2$?

При нечетном простом p проблемы нет: на очевидный вещественный аналог вопроса 7.1.3 ответом служит ответ на вопрос 7.1.3. Случай $p = 2$ неизбежно является совершенно другим. Нетрудно сформулировать столь слабое утверждение, что оно будет бесполезным (например, пустое), или же столь сильное, что оно будет неверным (например, очевидный вещественный аналог вопроса 7.1.3). Вопрос в том, чтобы сформулировать "правильное" утверждение. Кажется, подходящий кандидат найден, однако я пока еще не слышал, что есть хоть какая-то надежда доказать это утверждение.

Отмечу также еще одно недавнее достижение: доказано, что разные машины из гл. 2, по существу, эквивалентны. Точнее, на машину, превращающую входящие в нее пространства в спектры, накладывается некоторая разумная система аксиом; при этом показано, что соответствующий вариант машины Мэя удовлетворяет этим аксиомам; показано, что любая машина, удовлетворяющая этим аксиомам, эквивалентна машине Сигала, которая оказывается наиболее удобной

для сравнения. Произошло то же, что и с аксиомами Эйленберга - Стинрода: создатель новой машины должен принять на себя бремя проверки выполнения этих аксиом для своей машины. Это достижение принадлежит Мэю и Томасону [100]. Главная идея заимствована из работы Фидоровича, доказавшего единственность спектров в алгебраической K-теории [58].

В дополнение к этому доказана единственность машин, преобразующих пермутативные категории в спектры.

По-видимому, эта теория находится в достаточно удовлетворительном состоянии и близка к выполнению своих главных целей. Этим мажорным аккордом и завершим нашу книгу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams J. F. Vector fields on spheres, Ann. of Math.(2) 75 (1962), 603-632 . [Имеется перевод: Адамс Дж.Ф. Векторные поля на сферах. - Сб. Математика, 1963, 7 : 6, с. 49-79.]
2. ——On the groups J(X). I, Topology 2(1963), 181-195. [Имеется перевод: Адамс Дж.Ф. О группах J(X). I. - Сб. Математика, 1966, 10:5, с.70-84.
3. ——On the groups J(X). II, Topology 3 (1965), 131-171. [Имеется перевод: Адамс Дж.Ф. О группах J(X). II. - Сб. Математика, 1967, 11:4, с.3-41.]
4. ——On the groups J(X). III, Topology 3 (1965), 193-222. [Имеется перевод: Адамс Дж.Ф. О группах J(X). Ш. - Сб. Математика, 1968, 12:3, с.3-36.]
5. ——On the groups J(X). IV, Topology 5 (1966), 21-71. With a correction. Topology 7 (1968) 331. [Имеется перевод: Адамс Дж.Ф. О группах J(X). IУ. - Сб. Математика, 1968, 12:3, с. 37-97.]
6. ——Lectures on generalised cohomology, in Lecture Notes in Mathematics no. 99. Springer 1969, 1-138.
7. ——Algebraic topology in the last decade, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 22, Amer. Math.Soc. 1971, 1-22.
8. —— The Kahn-Priddy theorem. Proc. Cambridge Philos.Soc. 73 (1973), 45-55.
9. —— Stable homotopy and generalised cohomology, University of Chicago Press, 1974.
10. —— Primitive elements in the K-theory of BSU, Quarterly Jour. of Math. 27 (1976), 253-262.
11. Adams J.F., Clarke F.W. Stable operations on complex K-theory, Illinois Jour. Math. 21 (1977) no 4,826-829.
12. Adams J.F., Harris A.S., Switzer R.M. Hopf algebras of

cooperations for real and complex K-theory, Proc. London Math. Soc. (3), 23 (1971), 385-408.
13. Adams J.F., Hoffman P. Operations on K-theory of torsion-free spaces, Math. Proc. Cambridge Philos.Soc. 79 (1976), 483-491.
14. Adams J.F., Priddy S.B. Uniqueness of BSO, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 80 (1976), 475-509.
15. Adams J.F., Walker G. On complex Stiefel manifolds, Proc. Cambridge Philos. Soc. 61 (1965), 81-103. [Имеется перевод: Адамс Дж.Ф., Уокер Г. О комплексных многообразиях Штифеля. – Сб. Математика, 1967, 11:4, с. 42-68.]
16. Anderson D.W. Spectra and Γ-sets, in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 22, Amer. Math.Soc., 1971, 23-30.
17. Atiyah M.F. Characters and cohomology of finite groups, Publ. Math. of the I.H.E.S. no. 9 (1961), 23-64.
18. Atiyah M.F., Bott R. On the periodicity theorem for complex vector bundles, Acta Math. 112 (1964), 229-247.
19. Atiyah M.F., Bott R., Shapiro A. Clifford modules, Topology 3 Suppl. 1 (1964), 3-38.
20. Atiyah M.F., Segal G. Equivariant K-theory and completion, Jour. Differential Geometry 3 (1969), 1-18.
21. Barratt M.G. A note on the cohomology of semigroups, Jour. London Math.Soc. 36 (1961), 496-498.
22. ——— A free group functor for stable homotopy, in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 22, Amer. Math.Soc. 1971, 31-35.
23. ——— On Γ-structures, Bull. Amer. Math.Soc. 77 (1971), 1099.
24. Barratt M.G., Eccles P.J. Γ^+-structures. I. A free group functor for stable homotopy theory, Topology 13 (1974), 23-45.
25. ——— Γ^+-structures. II. A recognition principle for infinite loop spaces, Topology 13 (1974), 113-126.
26. ——— Γ^+-structures. III. The stable structure of $\Omega^\infty\Sigma^\infty A$, Topology 13 (1974), 199-207.
27. Barratt M.G., Priddy S.B. On the homology of nonconnected monoids and their associated groups, Comment. Math.Helv. 47 (1972), 1-14.
28. Beck J. On H-Spaces and infinite loop spaces, in Lecture Notes in Mathematics no. 99, Springer 1969, 139-153.
29. ——— Classifying spaces for homotopy-everything H-spa-

ces, in Lecture Notes in Mathematics no. 196, Springer 1971, 54-62.

30. Becker J.C. Characteristic Classes and K-theory, in Lecture Notes in Mathematics no. 428, Springer 1974, 132-143.

31. Becker J.C., Casson A., Gottlieb D.H. The Lefschetz number and fibre preserving maps, Bull. Amer. Math.Soc. 81 (1975), 425-427.

32. Becker J.C., Gottlib D.H. Applications of the evaluation map and transfer map theorems, Math. Ann 211 (1974), 277-288.

33. ——— The transfer map and fiber bundles, Topology 14, (1975), 1-12,

34. Boardman J.M. Thesis, Cambridge 1964.

35. ——— Stable homotopy theory, mimeographed notes, University of Warwick, 1966.

36. ——— Stable homotopy theory, mimeographed notes, Johns Hopkins, 1969/70.

37. ——— Monoids, H-spaces and tree surgery, mimeographed notes, Haverford College, 1969.

38. ——— Homotopy structures and the language of trees[1], Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 22, Amer. Math. Soc. 1971, 37-58.

39. Boardman J.M., Vogt R.M. Homotopy-everything H-spaces, Bull. Amer. Math.Soc. 74 (1968), 1117-1122.

40. ——— Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, Lecture Notes in Mathematics no. 347, Springer 1973. [Имеется перевод: Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. - М.: Мир, 1977.]

41. Borel A, Hirzebruch F. Characteristic Classes and homogeneous spaces, I.Amer. Jour. Math. 80 (1958), 458-538.

42. Bott R. The stable homotopy of the classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1957), 933-935

43. ——— The stable homotopy of the classical groups, Annals of Math (2) 70 (1959), 313-317.

44. Bott R., Samelson H. On the Pontryagin product in spaces on paths, Comment. Math. Helv. 27 (1953), 320-337.

45. Bousfield A.K., Kan D.M. Localisation and completion in homotopy theory, Bull. Amer. Math.Soc. 77 (1971), 1006-1010.

---

1) They whisper in the wind (они шелестят на ветру).

46. ———— Homotopy limits, completions and localisations, Lecture Notes in Mathematics no. 304, Springer 1972.
47. Browder W. Homology operations and loop spaces, Illinois Jour. Math. 4 (1960), 347-357.
48. Brown E.H. Cohomology theories, Annals of Math, (2), 75 (1962), 467-484. With a correction. Annals of Math (2), 78 (1963), 201.
49. ———— Abstract Homotopy Theory, Trans. Amer. Math Soc. 119, (1965), 79-85.
50. Cartan H. Seminaire H. Cartan 12, 1959/60. Periodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'apres Bott. Sécretariat mathematique, 11 rue Pierre Curie, Paris 5 e, 1961.
51. Cartan H., Eilenberg S. Homological Algebra, Princeton Univ. Press 1956. [Имеется перевод: Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. - М.: ИЛ, 1960.]
52. Cobb P.V.Z. P_n -spaces and n-fold loop spaces, Bull. Amer Math.Soc. 80 (1974), 910-914.
53. Cohen F.R., Lada T.J., May J.P. The homology of iterated loop spaces, Lecture Notes in Mathematics no. 533, Springer 1976.
54. Dold A., Lashof R.K. Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles, Illinois Jour. Math. 3 (1959), 285-305.
55. Dyer E., Lashof R.K. Homology of iterated loop spaces, Amer. Jour. Math. 84 (1962), pp. 35-38.
56. Eckmann B. On complexes with operators, Proc. Nat. Acad..Sci USA 39 (1953), 35-42.
57. Eilenberg S., MacLane S. On the groups $H(\pi, n)$. I. Annals of Math.(2), 58 (1953), 55-106.
58. Fiedorowicz Z. A note on the spectra of algebraic K-theory, Topology, 161 (1977), 417-422.
59. Freudenthal H. Uber die Klassen von Spharenabbildungen.I, Composito Math. 5 (1937), pp. 299-314.
60. Friedlander E.M. Fibrations in etale homotopy theory, Publ. Math. of the I.H.E.S. 42 (1973), 5-46.
61. ———— Stable Adams conjecture, submitted to the Math. Proc. Camb. Philos. Soc.
62. Gersten S.M. On the spectrum of algebraic K-theory, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 216-219.
63. Hilton P.J. On the homotopy groups of the union of spheres, J.London Math.Soc. 30 (1955), 154-172. [Имеется перевод:

[Хилтон П. О гомотопических группах объединений сфер. - Сб. Математика, 1957, 1:1, с.19-36.]

64. Hilton P.J., Mislin G., Roitberg J. Topological localisation and nilpotent groups, Bull. Amer. Math.Soc. 78 (1972), 1060-1063.

65. ——— Homotopical localisation, Proc. London Math. Soc. (3), 26 (1973), 693-706.

66. ——— Localisation of nilpotent groups and spaces, North-Holland 1975.

67. Hilton P.J., Roitberg J. Note on principal S^3-bundles, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 957-959.

68. ——— On principal S^3-bundles over spheres, Annals of Math. (2), 90 (1969), 91-107.

69. Hodgkin L., Snaith V.P. The K-theory of some more well-known spaces, preprint.

70. ——— Topics in K-theory, Lecture Notes in Mathematics no 496, Springer 1975.

71. Husemoller D. Fibre Bundles, McGraw-Hill 1966. [Имеется перевод: Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.-М.: Мир, 1970.]

72. Isbell J.R. On coherent algebras and stirct algebras, J.Algebra 13 (1969), 299-307.

73. James I.M. Reduced product spaces, Annals of Math. (2) 62 (1955). 170-197. [Имеется перевод: Джеймс И. Приведенные степени пространств. - Сб. Математика, 1957, 1:3, с.3-34.]

74. Kahn D.S., Priddy S.B. Applications of the transfer to stable homotopy theory, Bull. Amer. Math.Soc. 78 (1972), 981-987.

75. Kan D.M. Adjoint functors, Trans. Amer. Math.Soc. 87 (1958) [Имеется перевод: Кан Д. Сопряженные функторы. - Сб. Математика, 1959, 3:2, с. 3-34.]

76. Kan. D.M., Thurston W.P. Every connected space has the homology of a $K(\pi, 1)$, Topology 15 (1976), 253-258.

77. Kudo T., Araki S. On $H^*(\Omega^N(S^n); Z_2)$, Proc. Japan Acad. 32 (1956), 333-335.

78. ——— Topology of H_n-spaces and H-squaring operations, Mem.Fac.Sci. Kyusyu Univ.Ser. A 10 (1956), 85-120

79. Lemaire J.M. Le transfert dans les espaces fibrés (d'apres J.Becker et D.Gottlieb). Seminaire N. Bourbaki no. 472,1975

80. Ligaard H.J. Infinite loop maps from SF to BO at the prime 2, Illinois Jour. of Math.21 (1977) №4, 830-835.

81. Lima E.L. The Spanier-Whitehead duality in new homotopy categories, Summa Brasiliensis Math. 4 (1959), 91-148.
82. ———— Stable Postnikov invariants and their duals, Summa Brasiliensis Math. 4 (1960), 193-251.
83. MacLane S. Categorical Algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 40-106.
84. ———— Categories for the working mathematician, Graduate texts in mathematics no. 5, Springer 1971.
85. MacNab J. Categories for the idle mathematician; all your need to know, Proceedings of the Philharmonic Society of Zanzibar 17 (1976), 10-9.
86. Madsen I., Snaith V.P., Tornehave J. Homomorphisms of spectra and bundle theories, preprint, Aarhus 1974/75.
87. ———— Infinite loop maps in geometric topology, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 81 (1977), 399-430.
88. May J.P. Simplicial objects in algebraic topology, Van Nostrand Mathematical Studies no. 11, Van Nostrand 1967
89. ———— Categories of spectra and infinite loop spaces, in Lecture Notes in Mathematics no. 99, Springer 1969, 448-479.
90. ———— A general algebraic approach to Steenrod operations, in Lecture Notes in Mathematics no. 168, Springer 1970, 153-231. [Готовится перевод в изд-ве "Наука" в качестве приложения к кн.: Стинрод Н., Эпстейн Д. Когомологические операции.]
91. ———— Homology operations on infinite loop spaces, in Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 22, Amer. Math. Soc. 1971, 171-185.
92. ———— The geometry of iterated loop spaces, Lecture Notes in Mathematics no. 271, Springer 1972. [Имеется перевод: Мэй Дж. Геометрия итерированных пространств петель. – Дополнение к кн.: Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. – М.: Мир, 1977, с. 267-403]
93. ———— E_∞ spaces, group completions, and permutative categories, in "New developments in topology", London Math. Soc. lecture notes no. 11, Cambridge Univ. Press 1974, 61-93.
94. ———— Classifying spaces and fibrations, Mem. Amer. Math. Soc. 155 (1975).

95. ——— Problems in infinite loop space theory, in Notas de matematica y symposia Vol. 1, Sociedad Mathematica Mexicana, 1975, 106-125.
96. ——— Infinite loop space theory, Bull. Amer. Math.Soc. 83 (1977), 456-494. [Имеется перевод: Мэй Дж. Теория бесконечнократных пространств петель. - Успехи матем. наук, 1981, 36, 5, с. 137-195]
97. ——— The homotopical foundations of algebraic topology. To appear as a Monograph of the London Mathematical Society.
98. ——— H_∞ ring spectra, in the Proceedings of the topology conference in Stanford, 1976, to appear in the series Proceedings of Symposia in Pure Math., Amer. Math.Soc.
99. May J.P., Quinn F., Ray N., Tornehave J. E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra, Lecture Notes in Math. no. 577, Springer 1977.
100. May J.P., Thomason R. The uniqueness of infinite loop space machines, Topology, 17:3 (1978), 205-224.
101. McDuff D., Segal G. Homology fibrations and the "group completion" theorem, Invent. Math. 31 (1976), 279-284.
102. Milgram R.J. Iterated loop spaces, Annals of Math. 84 (1966), 386-403.
103. ——— The bar construction and abelian H-spaces, Illinois Jour. Math. 11 (1967), 242-250.
104. Milnor J.W. On the cobordism ring Ω and a complex analogue. I. Amer. Jour. Math. 82 (1960), 505-521.
105. ——— Microbundles and differentiable structures, mimeographed notes, Princeton 1961.
106. ——— On axiomatic homology theory, Pacific Jour. Math 12 (1962), 337-341.
107. ——— Topological manifolds and smooth manifolds, in Proc. Intern. Congress Math. 1962, Institut Mittag-Leffler, 1963, 132-138.
108. ——— Microbundles, Topology 3, Suppl. 1(1964), 53-80.
109. Mimura M., Nishida G., Toda H. Localisation of CW-complexes and its applications, J.Math.Soc. Japan 23 (1971), 593-624.
110. Morlet C. Microfibrées et structures différentiables, Séminaire Bourbaki 1963/64, Fasc. 1, expose 263.
111. Morse M. The calculus of variations in the large, Amer. Math.Soc. Colloquium Publications vol. 18, Amer. Math. Soc., 1934.

112. Nishida G. Cohomology operations in iterated loop spaces, Proc. Japan Acad. 44 (1968), 104-109.
113. ——— The nilpotency of elements of the stable homotopy groups of spheres, J.Math.Soc. Japan 25 (1973), 707-732.
114. Priddy S.B. On $\Omega^\infty S^\infty$ and the infinite symmetric group, in Proceedings of Symposia in Pure Math. 22, Amer. Math. Soc. 1971, 217-220.
115. ——— Transfer, symmetric groups, and stable homotopy theory, in Lecture Notes in Mathematics no. 341, Springer 1973, 244-255.
116. Quillen D.G. Some remarks on étale homotopy theory and a conjecture of Adams, Topology 7 (1968), 111-116.
117. ——— Cohomology of Groups, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1970, Gauthier-Villars 1971, vol. 2, 47-51.
118. ——— The Adams conjecture, Topology 10 (1970), 67-80.
119. ——— On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field, Annals of Math. (2), 96 (1972), 552-586.
120. ——— On the group completion of a simplicial monoid. Privately circulated MS-not to appear.
121. Rector D.L. Loop structures on the homotopy type of S^3, in Lecture Notes in Mathematics no 249, Springer 1971, 99-105.
122. Roush F.W. Transfer in generalised cohomology theories, Thesis, Princeton 1971.
123. Sanderson B.J. Immersions and embeddings of projective spaces, Proc. London Math.Soc. (3), 14 (1964), 137-153.
124. Segal G.B. Classifying spaces and spectral sequences, Publ. Math. of the I.H.E.S., no. 34 (1968), 105-112.
125. ——— Homotopy-everything H-spaces. Privately-circulated MS.
126. ——— Configuration-spaces and iterated loop-spaces, Invent. Math. 21 (1973), 213-222.
127. ——— Categories and cohomology theories, Topology 13 (1974), 293-312.
128. ——— The multiplicative group of classical cohomology, Quarterly Jour. Math. 26 (1975), 289-293.
129. Serre J-P. Homologie singuliere des espaces fibres, Annals of Math. (2), 54 (1951), 425-505. [Имеется перевод: Серр Ж.-П. Сингулярные гомологии расслоенных пространств. – В кн.: Расслоенные пространства. – М.: ИЛ, 1958, с. 9-114.]

130. ——— Groupes d'homotopie et classes de groupes abeliens, Annals of Math. (2), 58 (1953), 258-294. [Имеется перевод: Серр Ж.-П. Гомотопические группы и классы абелевых групп. - В кн.: Расслоенные пространства. - М.: ИЛ, 1958, с. 124-162.]

131. Seymour R.M. Vector bundles invariant under the Adams operations. Quarterly Jour. Math. 25 (1974), 395-414.

132. ——— The infinite loop Adams conjecture, submitted to Inventiones Math.

133. Snaith V.P. A stable decomposition of $\Omega^n S^n X$, Jour. London Math. Soc. (2), 7(1974), 577-583.

134. Spanier E.H. Duality and S-theory, Bull. Amer. Math.Soc. 62 (1956), 194-203. [Имеется перевод: Спеньер Э. Двойственность и S-теория. - Сб. Математика, 1959, 3:1, с.17-25.]

135. ——— Algebraic Topology, McGraw-Hill 1966. [Имеется перевод: Спеньер Э. Алгебраическая топология. - М.: Мир, 1966.]

136. Spanier E.H., Whitehead J.H.C. A first approximation to homotopy theory, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 655-660.

137. ——— Duality in homotopy theory, Mathematika 2 (1955) 56-80.

138. ——— The theory of carriers and S-theory, in Algebraic geometry and topology, Princeton Univ. Press 1957, 330-360. [Имеется перевод: Спаньер Э.Г., Уайтхед Дж.Г. Теория носителей и S-теория.-Сб. Математика, 1959, 3:1, с. 27-56.]

139. Stasheff J.D. Homotopy associativity of H-spaces. I, Trans. Amer. Math.Soc. 108 (1963), 275-292.

140. ——— A classification theorem for fibre spaces, Topology 2 (1963), 239-246.

141. ——— Infinite loop spaces - an historical survey, in Lecture Notes in Mathematics no. 196, Springer 1971, 43-53.

142. Steenrod N.E. Milgram's classifying space of a topological group, Topology 7 (1968), 349-368.

143. Steiner R. Smith's Prize essay, Cambridge 1976.

144. Sugawara M. A condition that a space is grouplike, Math. Jour. Okayama Univ. 7 (1957), 123-149.

145. Sullivan D. Triangulating homotopy equivalences, mimeographed notes, Warwick 1966.

146. Sullivan D. Smoothing homotopy equivalences, mimeographed notes, Warwick 1966/67.

147. ———— On the Hauptvermutung for manifolds, Bull Amer. Math.Soc. 73 (1967), 598-600.
148. ———— Geometric Topology, mimeographed notes, Princeton 1967.
149. ———— Geometric Topology. Part I. Localisation, periodicity and Galois symmetry, mimeographed notes, MIT 1970. [Имеется перевод: Сулливан Д. Геометрическая топология. – М.: Мир, 1975.]
150. ———— Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture, Annals of Math. 100 (1974), 1-79.
151. Thom R. Quelques proprietes globales des varietes differentiables, Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17-86. [Имеется перевод: Том Р. Некоторые свойства "в целом" дифференцируемых многообразий. – В кн.: Расслоенные пространства. – М.: ИЛ, 1958, с. 291-351.]
152. Tsuchiya A. Homology operations on ring spectrum of H^{∞} type and their applications, Jour. Math.Soc. Japan (1973), 277-316.
153. Vogt R. Boardman's stable homotopy category, mimeographed notes, Aarhus 1970.
154. Wagoner J.B. Delooping classifying spaces in algebraic K-theory, Topology 11 (1972), 349-370.
155. Whitehead G.W. Generalized homology theories, Trans. Amer. Math.Soc. 102 (1962), 227-283.
156. Zabrodsky A. Homotopy associativity and finite CW complexes, Topology 9 (1970), 121-128.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

157. Габриэль П., Цисман М. Категория частных и теория гомотопий. – М.: Мир, 1971.
158. Постников М.М. Локализация топологических пространств.– Успехи матем. наук, 1977, т.32, № 6, с. 117-181.
159. Фултон У., Мак-Ферсон Р. Категорный подход к изучению пространств с особенностями. – М.: Мир, 1982.
160. Clapp M. Duality and transfer for parametrized spectra, Arch. Math., 37 (1981), N 5, 462-472.
161. Cohen F.R., May J.P., Taylor L.R. Spliting of certain spaces CX, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 84:3 (1978) 465-496.

162. ________ Spliting of some more spaces, Math. Proc. Cambridge Philos Soc., 86;2 (1979), 227-236.
163. Feshbach M. The transfer and compact Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., 251 (1979) 131-169.
164. Friedlander E., Seymor R. Two proofs of the stable Adams conjecture, Bull. Amer. Math. Soc., 83, №6 (1977) 1300 - 1302.
165. Kraines D., Lada T. A counterexample to the transfer conjecture, in Lecture Notes in Math. no 741, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979, 588-624.
166. Madsen I., Milgram R.J. The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds, Ann. Math.Studies, Princeton Univ. Press, 92, 1979.[Готовится перевод в изд-ве "Мир".]
167. Seymor R., Snaith V. A J-homomorphism associated with a space of empty varietes (addenda and corrigenda to two papers on the J-homomorphism) in Lecture Notes in Math no 741, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979, 643-652.
168. Switzer R.M. Algebraic topology; homotopy and homology. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975. [Готовится перевод в изд-ве "Наука".]

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, Издательство "Мир".

Дж. Адамс

Бесконечнократные пространства петель

Научный редактор Г.М. Цукерман

Мл. научный редактор И.В. Герасимова

Художник А.В. Шипов

Художественный редактор В.И. Шаповалов

Технический редактор Г.Б. Алюлина

Корректор А.Я. Шехтер

ИБ № 3765

Подписано к печати 15.09.82.

Формат 60х90 1/16.

Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Объем 6,25 бум.л.

Усл.печ.л. 12,5. Усл.кр.отт. 12,73.

Уч.-изд.л. 9,61. Изд. № 1/1953.

Тираж 5300 экз. Зак. 7168 Цена 1 р. 40 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ

г. Люберцы, Октябрьский проспект, 403

1р 40к

Имя Дж. Адамса стало широко известно в математическом мире в 1958 г., когда он доказал гипотезу Фробениуса о размерностях вещественных алгебр с делением. Ему принадлежат фундаментальные результаты в K-теории, гомотопической топологии и теории H-пространств.

Москва
«Мир»

БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»